

**Mester László**

**Szemcsés anyagok új fizikai-mechanikai  
elmélete**

**2009**

## Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	3
A szemcsés anyag, mint külön halmazállapot.....	4
A szemcsés anyag halmazállapotokkal összefüggő tulajdonságai.....	6
A szemcsés anyag, mint anyagi állapot.....	10
Kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai alaptörvényei.....	13
I. törvény.....	14
II. törvény.....	14
III. törvény.....	16
IV. törvény.....	23
Feszültségek a kohézió nélküli szemcsés anyagokban.....	25
Aktív feszültségi állapot.....	30
Az aktív feszültségi állapot kialakulása.....	30
Függőleges támfalra ható nyomás.....	35
Boltozatképződés szemcsés anyagokban.....	38
A boltozat kialakulásának feltétele.....	38
A kifolyás jellege.....	43
A boltozat kialakulásának mechanizmusa.....	45
A boltív geometriai egyenlete.....	46
A garatméretezés elve.....	48
Kísérleti eredmények.....	51
Feszültségek a kohéziós szemcsés anyagokban.....	53
Oldalnyomás.....	53
Szabad rézsú hajlásszöge.....	57
Aktív feszültségi állapot.....	62
Összefoglalás.....	67
Felhasznált irodalom.....	71

## Bevezetés

A szemcsés anyagok fizikai-mechanikai elméleti kutatását a XVIII. század óta Coulomb, majd Rankine munkája nyomán az jellemzi, hogy a szilárd testekre levezetett feszültséganalízis módszerét alkalmazzák. Mások a viszkózus folyadékok hasonlóságait vélik megtalálni a szemcsés anyagokban és azok törvényszerűségeivel írják le az anyag fizikai viselkedését. Véleményem szerint kontinuumokra levezetett tételek többsége a szilárd, elkülönült szemcsékből álló halmazra nem alkalmazható. Kiindulásként csak olyan természeti törvények vehetők figyelembe, melyek az egyetemes anyagra egyaránt érvényesek.

Jelen munka – szakítva az eddigi szemléletmóddal – új nézőpontból kívánja megragadni a szemcsés anyagok fizikai-mechanikai összefüggését. Ebből következik, hogy nem tűzte ki célul a témakörben született elméletek kritikai elemzését, hiszen azoktól függetlenül került sor az új alapok meghatározására. A kontinuum szemlélettel ellentétben az egyes szemcsék egyensúlyi helyzetét, illetve mozgási állapotát vizsgálva egyszerű kísérletekre, valamint a newtoni törvényekre és egy tapasztalati törvényre, a súrlódás törvényére épül ez az új elmélet.

## **A szemcsés anyag, mint külön halmazállapot**

A természetben előforduló anyagok fizikai megjelenési formái igen változatosak. A Föld felszínének legnagyobb részét óceánok, tengerek, tavak borítják, azaz vizek. A szárazföld változatosabb: sziklás hegygerinceket, lankás talajjal takart felszíneket és homokbuckás sivatagokat találunk. Helyenként a felszint a téli hidegben hó vagy jég takarja. A felszín felett pedig szél fúj, vagy épp szélséend van, azaz a levegőt érzékeljük. Ránk a nap melege süt, és tudjuk, hogy a Nap belsejében megint más anyagi állapot található. A Föld felszínének legnagyobb részét beborító víz megjelenési formája önmagában is változatos. Normál hőmérsékleten és nyomáson folyékony, de a hőmérséklet emelkedésével, egyre gyorsabban párolog és gőz lesz belőle. Köd vagy felhő keletkezik. A gőz, ha megfagy és kicsapódik a hidegben, hó hullik, szemcsés anyaggá halmozódik. Ha a hó elolvad, folyadék keletkezik, mely, ha megfagy szilárd jéggé fagy. Azaz a víz előfordulhat: folyadék, gőz (légnemű), hó (szemcsés) és jég (szilárd) állapotban. Mindegyik formájában más-más jellemző tulajdonságokkal rendelkezik és más-más törvényszerűségek szerint viselkedik.

A fizika az anyag főbb megjelenési formáit a halmazállapot szerinti csoportosítással választja el: plazmaállapot, gáz, folyadék és szilárd halmazállapot. Egyes anyagfajták nem szoríthatók be egyetlen merev halmazállapot kategóriájába sem, mert két vagy több állapot tulajdonságait is magukon viselik. Ezek az anyagok viszont a hasonló halmazállapotú anyagtörvényekre visszavezetve írhatók le. A szemcsés anyag az említett négy halmazállapot egyikébe sem sorolható. Az anyag

fizikai-mechanikai tulajdonságai pedig nem teszik lehetővé, hogy egy vagy több halmazállapot fizikai törvényeivel sikeresen írjuk le viselkedését.

A szemcsés anyag olyan nagyszámú, egymással érintkező szilárd testek halmaza, ahol a szemcsék – mint a halmaz alkotó elemei – a rá ható erők mellett megtartják alakjukat és a szemcsék között esetlegesen fellépő kohéziós erő lényegesen kisebb, mint a szemcsék belsejében ható összetartó erő.

A szemcsés anyagok összefüggő fizikai rendszere hiányzik, csupán egyes lényeges, elsősorban talajmechanikai problémák elméleti feldolgozása ismeretes. Ezen kérdések megoldására sok és egymásnak ellentmondó eredményre vezető elméletet alkalmaznak, melyek között egységes fizikai alapokon nyugvó kapcsolat vagy nincs, vagy vitatható. A szemcsés anyagokkal foglalkozó mechanikai elméletek többsége a szilárd testekre levezetett feszültséganalízis módszerét alkalmazza, mely módszer eleve feltételezi, hogy a szemcsés anyag szilárd halmazállapotú kontinuum.

Van olyan felfogás, hogy a szemcsés anyagok a viszkózus folyadékok törvényeivel közelíthetők, viszkoelasztikus vagy elasztoviszkoplasztikus anyagként viselkednek. A bonyolult elméleti megoldások egyes mechanikai feladatok megoldásához ugyan közelítő eredményt szolgáltatnak, de az anyag viselkedésének általános és megbízható leírásához nem alkalmazhatók.

A szemcsés anyagok halmazállapoti megítélése nem egyértelmű. Ezt tükrözi, hogy elnevezése sem egységes, például szóródó, porszerű, ömlesztett, szilárd, szemes, szemcsézett, szemcsés, darás, dercés stb. anyagnak nevezik.

A szemcsés anyag fizikai viselkedése és tulajdonságai olyan minőségi eltérést mutatnak a többi halmazállapotban előforduló anyagoktól, hogy azok között önálló kategóriát képviselnek.

A szemcsés anyag idealizált fogalma lehetővé teszi az anyag fizikai viselkedésének, tulajdonságainak és származtatásának egyszerűsített magyarázatát, hasonlóan a tökéletes gázok, ideális folyadékok és kristályos szilárd anyagok esetében alkalmazott feltételezésekhez. Ideális szemcsés anyag az anyag tömegéhez viszonyított kicsi, de nagyszámú szilárd testek (szemcsék) olyan halmaza, ahol a

szemcsék között vonzó nem hat és közöttük Coulomb súrlódási törvénye érvényesül.

## A szemcsés anyag halmazállapotokkal összefüggő tulajdonságai

A halmazállapot szerinti kategorizálás alapját az anyag alakjának és térfogatának önállósága képezi. A három klasszikus halmazállapot jellemző ismérve tehát

- gázok: önálló alakkal és térfogattal nem rendelkeznek;
- folyadékok: önálló alakkal nem, de önálló térfogattal rendelkeznek;
- szilárd testek: önálló alakkal és térfogattal rendelkeznek.

Az önálló alak és térfogat kérdésében a szemcsés anyagra az a jellemző, hogy:

- részben önálló alakja van, a szemcsés halmaz rézsűszögében megáll, de rézsűszöge alatt a tárolóedény alakját veszi fel. E tulajdonsága a folyadékok és a szilárd testek közé helyezi.
- részben önálló térfogata van, de korlátozott mértékben összenyomható. A szemcsés anyag kompresszibilitása a gázok és a szilárd testek összenyomhatósága között helyezkedik el.

Az anyagok halmazállapotával összefüggő anyagszerkezeti kutatások az alak- és térfogattartás okát az alkotóelemek tulajdonságaiban és kölcsönhatásában találta meg. Ezért a modern fizika a halmazállapotok meghatározásánál az anyagra jellemző legkisebb alkotó elemek mozgási állapotát, egymáshoz viszonyított helyzetét és kölcsönhatását veszi figyelembe. Ez tette lehetővé, hogy a három klasszikus halmazállapot mellett egy negyediket, a plazmaállapotot is elfogadta a természettudomány.

Szükségesnek látszik hangsúlyozni az anyagra jellemző legkisebb alkotó elemek kifejezést, mert ez a halmazállapotok meghatározásánál alapvető fontosságú. Tehát

- a *plazmaállapotú* anyagot a molekulák vagy atomok szétesett részei, az atom- vagy molekulaionok és az elektronok alkotják. A plazmaállapotot az atom- vagy molekulaionok és elektronok kölcsönhatásai jellemzik, de nem az atom vagy molekula egyéb részei.

- a *gázhalmazállapotú* anyag tulajdonságait a gázmolekulák – nemesgázok esetén atomok – kölcsönhatásai szabják meg.
- a *folyadékoknál* szintén az atomok illetve molekulák mozgása és egymáshoz való viszonya a döntő. Víz esetében nem a hidrogén vagy oxigén atomok, és nem a vízcseppek, hanem a H<sub>2</sub>O molekulák kölcsönhatásai determinálják a folyadékot.
- kristályos *szilárd* test esetében a rácspontokban elhelyezkedő atomok, molekulák vagy ionok hatásviszonyaival magyarázhatók a szilárd halmazállapotú anyag tulajdonságai és nem pl. az elemi kristályok illetve krisztallitok kölcsönhatásaival, és nem a rácspontokban elhelyezkedő molekulák felépítésében résztvevő atomok és annak részeinek egyedi tulajdonságaival.
- *szemcsés* anyag esetében az anyagra jellemző legkisebb alkotóelem a szemcse. Az atomi részek, az atomok vagy molekulák, melyekből a szemcsék felépülnek, nem közvetlen jellemzői – legalábbis nem fizikai értelemben vett jellemzői – az anyagnak, éppen úgy nem, mint ahogy a gázoknál és folyadékoknál sem az atomok vagy molekulák felépítésében részt vevő atomi részek, illetve atomok egyedi fizikai tulajdonságai és kölcsönhatásai jellemzik az anyagot.

A három klasszikus halmazállapot főbb jellemzői az alábbiakban foglalhatók össze:

*Gázhalmazállapot:* A gázok molekulái – nemesgáz esetében atomjai – a rendelkezésükre álló térben szabadon mozognak, a véletlen törvényszerűségei szerint egymással rugalmasan ütköznek. A gázok alkotóelemei saját méreteikhez viszonyítva igen nagy átlagtávolságra helyezkednek el egymástól, egymásra erőhatást csak nagyon kis mértékben gyakorolnak. Tökéletes gázokban az erőhatástól eltekinthetünk. A molekulák translációs, rotációs és vibrációs mozgást végeznek. A gázok a rendelkezésükre álló teret egyenletesen kitöltik, tehát önálló alakkal és térfogattal nem rendelkeznek.

*Folyékony halmazállapot:* A folyadékokra jellemző legkisebb alkotóelemek az atomok illetve molekulák között ható erők elég nagyok ahhoz, hogy a hőmozgásból adódó eltávolodásukat egymástól meggátolják, de nem elég nagy ahhoz, hogy helyváltoztatásukat megakadályozzák. A molekulák a gázokéhoz viszonyítva kis translációs mozgással rendelkeznek, miközben rotációs és vibrációs mozgást is végeznek. Az alkotóelemek, mozgásuk és közelségük következtében, állandóan

rugalmasan ütköznek egymással, tehát egymással érintkeznek, ezért a folyadékoknak állandó térfogatuk van. A molekulák között ható vonzóerő a földi gravitációs erőterhez viszonyítva olyan kicsi, hogy az önálló alakképzéshez nem elegendő, így a folyadékok önálló alakkal nem rendelkeznek.

*Szilárd halmazállapot:* A szilárd testben az anyagra jellemző legkisebb alkotóelemek az atomok, molekulák vagy ionok. Helyzetük kötött, kristályos szerkezetben geometriailag meghatározott, csak rezgőmozgást végeznek. Az alkotóelemekre nagy erők hatnak, melyek meggátolják a tartós eltávolodást egyensúlyi helyzetükből. Ezért a szilárd testeknek önálló alakjuk és térfogatuk van.

A szemcsés anyag a három klasszikus halmazállapot főbb halmazállapoti jellemzőitől lényeges eltérést mutat. Az ideális szemcsés anyag alkotóelemei, a szemcsék, relatív nyugalomban vannak. Az alkotóelemek között vonzóerő nem hat, az anyagot a gravitációs erőből származó nyomó-, és a szemcsék felületén ébredő nyíróerők, - nyugvó súrlódó erők – tartják halmazban. Az erőhatások következtében az ideális szemcsés anyag rézsűszögéig megáll, tehát önálló alakkal csak részben rendelkezik. A szemcsés anyag alkotóelemei állandó érintkezésben vannak, ezért nyugalom esetén térfogata állandó. Nyomás hatására az anyag tömörödik, a szemcsék kedvezőbb helykitöltésű elrendezést foglalnak el. A szemcsés anyagok a gázokhoz képest kicsi, de a szilárd anyagokhoz képest nagy kompresszibilitással rendelkeznek.

Az ideális szemcsés anyag jellemzői az egyes halmazállapotok főbb tulajdonságaitól az alábbi lényeges eltérést mutatják:

- *gázhalmazállapottól:* az alkotóelemek egymással állandó érintkezésben vannak és saját térfogattal rendelkeznek;
- *folyékony halmazállapottól:* részben önálló alakja van;
- *gáz- és folyékony halmazállapottól:* az alkotóelemek relatív, ütközésmentes nyugalomban vannak és bennük nyugvó súrlódó erő – nyíróerő – ébred;
- *szilárd halmazállapottól:* az alkotóelemek között nincs vonzóerő, ezért önálló alakkal csak részben rendelkeznek.



A szemcsés anyag az anyagi halmazállapotok lényegét érintő tulajdonságaiban olyan minőségi eltérést mutat, mely külön halmazállapotként definiálását indokolja.

Az anyagi halmazállapotok idealizált esetének rövid, lényegét érintő – a teljesség igénye nélküli – meghatározása az alábbiakban foglalható össze.

*Tökéletes gáz:* egymástól távol mozgó, de véletlenszerűen rugalmasan ütköző, egymásra erőhatást nem gyakorló molekulák (nemesgázoknál atomok) rendezetlen halmaza.

*Ideális folyadék:* egymáshoz közel mozgó és folyamatosan rugalmasan ütköző molekulák halmaza.

*Kristályos szilárd:* vibráló atomok, molekulák vagy ionok nagy erővel helyhez kötött rendezett halmaza.

*Ideális szemcsés:* egymással állandóan érintkező, relatív mozdulatlan szemcsék olyan halmaza, melyben az alkotóelemek közötti erőhatás a gravitációs súlyerőből származó nyomó- és az azzal arányos súrlódó erőből tevődik össze, közöttük kohéziós erő nincs.

A szemcsés anyag külön halmazállapot szerinti felfogása elsősorban mechanikai szempontból fontos. (A halmazállapot szerinti kategorizálás alapja is mechanikai eredetű: az alak- és térfogattartás oka az alkotóelemek közötti erőhatásból vezethető le.) Az anyagi halmazállapotok mechanikai tulajdonságai egymástól megkülönböztető lényegi eltérést mutatnak:

- a *gázok* a nyomásnövekedést térfogatuk jelentős csökkenésével követik (a térfogat és a nyomás szorzata állandó hőmérséklet mellett konstans), tehát nyomófeszültséget csak részben – a térfogatváltozás rovására – képesek elviselni. A tökéletes gázokban az alkotóelemek közötti vonzóerő nem lép fel, ezért húzófeszültség az anyagban nem ébredhet. A nyugvó – nem áramló – gázokban nyírófeszültség nem ébred.

- a *folyadékok* kis kompresszibilitással rendelkeznek, mechanikai szempontból összenyomhatatlannak tekinthetők, ezért nyomófeszültség elviselésére képesek. A molekulák között ható vonzóerő az egymással állandóan ütköző molekulák eltávolodását megakadályozza. Egyensúlyi, illetve stabil helyzet csak adott külső nyomás mellett jön létre, azaz mechanikai szempontból a folyadék húzófeszültséget nem képes elviselni. ( $p = 0$  nyomás közelében a folyadék megszakad, molekulái

szétrepülnek és gázhalmazállapotba jutnak.) Ideális folyadékokban súrlódás nincs, valóságos folyadékok belsejében nyugvó súrlódás szintén nem ébred.

- a *szilárd* testek összenyomhatatlannak tekinthetők és alkotóelemei jelentős erővel kapcsolódnak egymáshoz, ezért húzó-, nyomó- és nyírófeszültségek elviselésére képesek.
- az ideális *szemcsés* anyag kompresszibilitása kicsi, így nyomófeszültség elviselésére képes. A kohézió nélküli szemcsés anyagban a nyomófeszültség mellett csak nyírófeszültség ébred, az anyagban húzófeszültség nem lép fel.

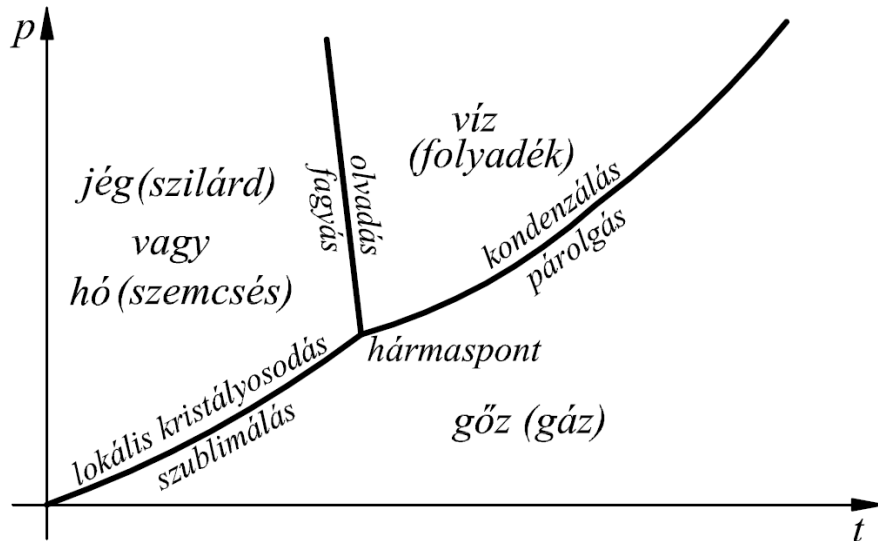
### A szemcsés anyag, mint anyagi állapot

A szemcsés anyag külön halmazállapot szerinti felfogását nemcsak az egyéb halmazállapotoktól eltérő fizikai tulajdonságai indokolják, hanem az is, hogy a szemcsés anyag az anyag egyik megjelenési formája, azaz az anyagnak egyik meghatározott állapota.

A szemcsés anyag – mint az anyag egész tömegéhez viszonyított kicsi, de nagy számú szilárd testek halmaza – többnyire nagy méretű szilárd anyag mechanikai aprításával, aprózódásával keletkezik. Keletkezése, azaz az anyag szemcsés állapotba hozása azonban nemcsak mechanikai úton lehetséges, minthogy a természetben előforduló szemcsés anyagok sem csak mechanikai aprózódással jönnek, vagy jöttek létre. A szemcsés anyag termodinamikailag is előállítható.

Ismeretes, hogy ha a folyadék molekuláinak kinetikai energiája egy küszöbértéket meghalad, akkor gázhalmazállapotba jut, míg ha egy másik küszöbérték alá süllyed, akkor szilárd halmazállapotba kerül és megindul a kristályosodás. A halmazállapotokat jellemző termodinamikai állapotváltozók küszöbértékei például  $p - t$  (nyomás – hőmérséklet), diagramban ábrázolhatók. Az 1. ábrán a  $H_2O$   $p - t$  diagramja látható. A  $p - t$  diagram hármaspontját és az origót összekötő görbe a szublimációs görbe. A szilárd halmazállapotú jég fázisból a gáz halmazállapotú gőz fázisba például nyomáscsökkenéssel, a szublimációs görbe átlépésével jut az anyag. Gőz fázisból viszont visszafelé átlépve a szublimációs görbét nem jég, hanem szemcsés halmazállapotú hó keletkezik. A szemcsés anyag – víz esetében a hó –

lokális göcökben keletkező kristályosodás eredményeként jön létre. A folyamat *lokális kristályosodásnak* nevezhető, melynek fizikai magyarázata abban van, hogy a kis sebességgel (alacsony hőmérsékleten) translációs mozgást végző molekulák, a



1. ábra A H<sub>2</sub>O p - t diagramja

van der Waals – féle erők vonzási körét nem képesek elhagyni – például hőelvonás következtében -, tehát a molekulák translációs mozgása megszűnik. A molekula párba újabb molekulák ütköztén, azokat fogva tartva, kristályrácsot alkotnak, majd a növekvő kristályok hozzák létre a szemcséket. A gázhalmazállapotban lévő molekulák sűrűsége a szilárd halmazállapot molekulásűrűségéhez viszonyítva nagyon kicsi, ezért az egymástól relatív távol, lokálisan kialakuló kristályosodási folyamat elkülönülő szemcsék sokaságát hozza létre, melyek lecsapódva szemcsés halmazt képeznek.

Állandó hőmérsékleten gáz fázisból szemcsés fázisba hőelvonás mellett juthatunk, mely az olvadáshő és párolgáshő összege.

A halmazállapotok a p – t diagram fázishatárain változnak. Ha a szublimációs görbét a szilárd fázisból a gáz fázis irányába lépi át az anyag, gázt kapunk, viszont megfordítva, gáz fázisból átlépve a görbét, szemcsés anyagot nyerünk. Tehát a fázishatárok átlépésének iránya szerint a halmazállapotok a következők:

*gáz* → lokális kristályosodás → *szemcsés* → olvadás → *folyadék* → párolgás  
→ *gáz*;

viszont, ellenkező irányban:

*gáz* → kondenzálás → *folyadék* → fagyás → *szilárd* → szublimálás → *gáz*.

Szemcsés fázisból szilárd fázisba azonos fázishatár kétszeri átlépésével jutunk:

*szemcsés* → olvadás → *folyadék* → fagyás → *szilárd*.

Folyadék fázisból szemcsés anyag közvetlenül is létrehozható, ha túlhűtött folyadékba egyszerre sok, egymástól közel azonos távolságban levő kristálygócot juttatunk. A kristálygócokból kiinduló kristálynövekedéseket a szomszédos kristályok akadályozzák meg, melyek geometriai kristály elhelyezkedése nem szimmetrikus vagy egybevágó, ezért a kristályok között rácserők nem, vagy csak elvétve lépnek fel, azaz az egyes szemcsék belső kohéziós ereje lényegesen nagyobb a szemcsék között esetlegesen ható kohéziós erőknél.

A szemcsés anyag alapvető fizikai tulajdonságai lényegesen eltérnek a kémiaiilag azonos, de szilárd, folyékony vagy gáznemű állapotú anyagétól. Térfogatsúlya, fénytörési, hő- és hangtani, elektromos, mechanikai, stb. tulajdonságai és viselkedése, valamint az a tény, hogy a legtöbb anyag szemcsés állapotba hozható, a szemcsés anyag külön halmazállapotkénti meghatározását indokolja.

## **Kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai- mechanikai alaptörvényei**

I. Kohézió nélküli szemcsés anyagokban csak nyomó- és nyírófeszültségek ébredhetnek.

II. Nyugalomban levő, kohézió nélküli szemcsés anyagokban a függőleges irányú nyomófeszültségek által ébresztett feszültségek a függőleges iránytól mért  $\pm 90^\circ - \varphi$  zónában lefelé hatnak. ( $\varphi$  az anyag súrlódási szöge.)

III. A kohézió nélküli szemcsés anyag önsúlyából származó oldalnyomás értéke a mélység ( $h$ ) és térfogatsúly ( $\gamma$ ) szorzatának fele ( $\frac{h\gamma}{2}$ ), iránya a vízszintestől az anyagban ébredő súrlódási szöggel lefelé tér el, ha a felszín vízszintes és az adott mélység felett az anyag a vízszintessel  $\varphi$  szöget bezáró teret egyenletesen kitölti.

IV. A kohézió nélküli szemcsés anyagok mindaddig megtartják az őket jellemző fizikai-mechanikai törvényeket, amíg alkotó elemeik, a szemcsék, megőrzik relatív nyugalmukat. Amint a szemcsék relatív mozgásba kerülnek – egymással ütköznek -, a szemcsés anyagok a folyadékok fizikai-mechanikai törvényei szerint viselkednek.

A kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai törvényei statisztikai jelleggel érvényesülnek, mert maga az anyag különböző szemcsék sokaságából áll.

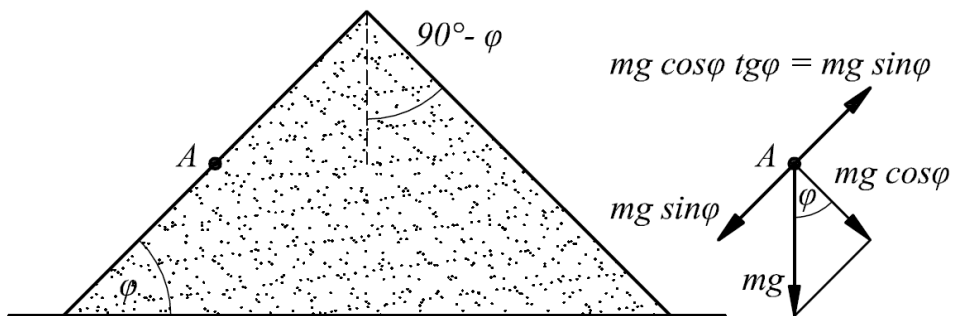
## I. törvény

Az I. törvény a kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai definíciója.

Az ideális folyadékokban csak nyomófeszültségek ébrednek, a kohézió nélküli szemcsés anyagok csak nyomó- és nyírófeszültségek, míg a szilárd testek nyomó-, nyíró- és húzófeszültségek elviselésére képesek. A kohézió nélküli szemcsés anyagok a szilárd testektől abban különböznek, hogy húzófeszültséget nem képesek elviselni, az ideális folyadéktól viszont abban, hogy bennük nyírófeszültségek is ébrednek. A folyadékok alkotóelemei ugyanakkor állandó relatív mozgásban vannak – egymással ütköznek -, míg a szemcsés anyagok alkotóelemei, a szemcsék relatív nyugalomban vannak.

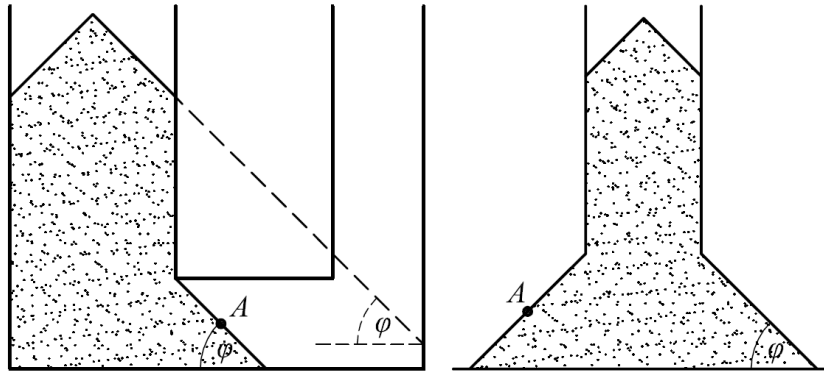
## II. törvény

A II. törvény a függőleges irányú nyomófeszültségek terjedésének irányát fogalmazza meg. Kísérleti igazolását a szabad rézsú természetes állékonytsága nyújtja (2. ábra).



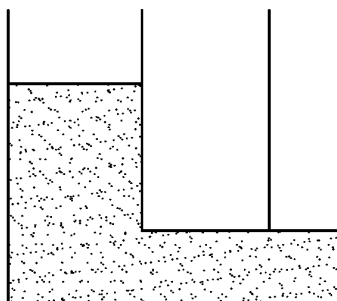
2. ábra A rézsú lapján lévő szemcse egyensúlyi határhelyzete

A szemcsékből álló halmazban a függőleges nyomófeszültséget a szemcsék önsúlya hozza létre. Ha a rézsú lapján elhelyezkedő  $A$  jelű szemcsére - mely az egyensúly határhelyzetében van -, a függőleges irányhoz viszonyítva  $90^\circ - \varphi$ -nél nagyobb szögben mutató feszültségvektor hatna a rézsú belsejéből, akkor a szemcse elvesztené egyensúlyi helyzetét és lecsúszna.



3. ábra A függőleges irányú nyomófeszültségek által ébresztett feszültségek a vízszintessel  $\varphi$ -nél nagyobb szöget zárnak be

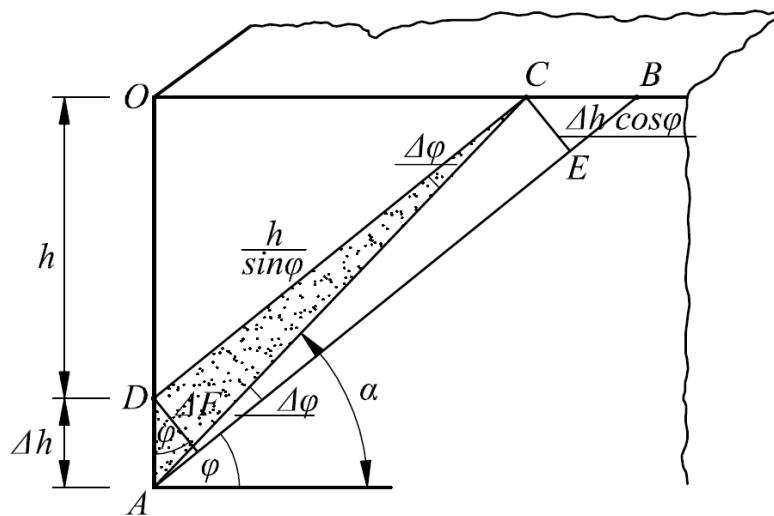
A II. törvény helyességét további kísérletek bizonyítják (3. ábra). Amennyiben az  $A$  jelű szemcsére a vízszinteshez képest  $\varphi$  szögnél kisebb szöget bezáró nyomófeszültség hatna, úgy a természetes rézsú hajlásszöge  $\varphi$ -nél kisebb lenne. Ha a függőleges irányú nyomófeszültség például vízszintes feszültséget indukálna, úgy az a rézsú lapján lévő szemcséket lelökné. Az anyag elterülne és a 4. ábra szerinti alakot venné fel. Ez azonban nem áll fenn.



4. ábra Ha a nyomófeszültségek vízszintes feszültségeket indukálnának, akkor a szemcsés anyag elhelyezkedésének ilyennek kellene lenni

### III. törvény

A III. törvényben foglaltak szerinti esetekben az oldalnyomás  $\frac{h\gamma}{2}$ , és iránya a vízszintestől az anyag belsejében ébredő súrlódási szöggel lefelé tér el. Bizonyítása a következő:



5. ábra Vízszintes térszín végtelen térnegyede

Az 5. ábra végtelen kiterjedésű vízszintes felszínű kohézió nélküli szemcsés anyagalmaz két egymásra merőleges függőleges síkkal elméletileg kimetszett részét mutatja, (tehát a vízszintes térszín végtelen térnegyedét ábrázolja,) mely a mechanikai vizsgálatok síkbeli elvégzésének lehetőségét biztosítja. A II. törvény szerint az  $AB$  szakasz alóli anyagrészből csak az  $AB$  sík feletti anyagrész által kiváltott reakciófeszültségek hathatnak az  $OA$  síkra. Amennyiben az  $OAB$  háromszögben található szemcsés anyagot elvonnánk, a vízszinteshez  $\varphi$  szögben hajló  $AB$  természetes rézsűszögben az anyag megállna. Az  $OA$  síkra, tehát csak az  $OAB$  térrészben elhelyezkedő szemcsés anyag önsúlyából származhatnak a feszültségek. Az  $AB$  síkon egyensúlyi határhelyzet áll fenn, a  $\varphi$  hajlásszögű lejtőn  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$  súrlódási tényezővel rendelkező anyag még éppen nem csúszik le.



Amennyiben a  $\varphi$  lejtőszöget egy igen kis  $\Delta\varphi$  értékkel megnövelnénk, akkor a felette levő anyag egyenletesen gyorsuló mozgással lecsúszhatna a  $\varphi + \Delta\varphi$  hajlásszögű lejtőn, azaz a tömegével és gyorsulásával egyenes arányú erőhatást gyakorolna az  $OA$  síkra. A szemcsés anyag jellegéből fakadóan végtelen sok  $\varphi + \Delta\varphi$  hajlásszögű lejtő létezik, mely feletti anyagok súlya a  $\Delta\varphi$  szöggel növelt lejtőkön fejtik ki az  $AO$  síkra ható lejtő irányú feszültségeket. Az 5. ábra szerint a  $\Delta h$ -val növelt mélység eredményeként létrejövő  $\alpha = \varphi + \Delta\varphi$  hajlásszögű lejtőn az  $ADC$  szemcsés anyag a lejtőre önsúlyával ( $\Delta G$ ) és a felette levő anyag súlyával ( $G$ ) nehezedik. Az  $ADC$  anyagmennyiség a  $\Delta h$  szakaszon támaszkodik meg. A  $\Delta h$  felületszakasz lejtőre merőleges vetülete  $\Delta F = \Delta h \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)$ . Tekintve, hogy a  $\Delta h$  igen kicsi, ezért ott a feszültségeloszlás egyenletesnek tekinthető, így az ott ébredő lejtő irányú feszültségre felírható:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{(G + \Delta G)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\Delta F},$$

Az egységnyi hosszúságú térrészben a

$$G = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

és

$$\Delta G = \frac{1}{2} \cdot \frac{h\gamma}{\sin \varphi} \Delta h \cdot \cos \varphi,$$

azaz

$$\Delta G = \frac{h\gamma}{2} \Delta h \cdot \operatorname{ctg} \varphi,$$

továbbá

$$\Delta F = \Delta h \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi).$$

Az egyenletben szereplő  $(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$  is kifejezhető:

$$\begin{aligned} &= \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi), \\ &= \sin \varphi \cdot \cos \Delta\varphi + \cos \varphi \cdot \sin \Delta\varphi - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (\cos \varphi \cdot \cos \Delta\varphi - \sin \varphi \cdot \sin \Delta\varphi), \\ &= \cos \varphi \cdot \sin \Delta\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \sin \Delta\varphi, \\ &= \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi}.$$

A  $G$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta F$  és  $\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha$  értékeit a  $\sigma_\alpha$ -ra felírt összefüggésbe helyettesítve:

$$\sigma_\alpha = \frac{\left( \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{\Delta h \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi}}{\Delta h \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\frac{h \gamma}{2} \operatorname{ctg} \varphi (h + \Delta h) \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi}}{\Delta h \cdot \cos(\varphi + \Delta\varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} (h + \Delta h) \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi}}{\Delta h (\cos \varphi \cdot \cos \Delta\varphi - \sin \varphi \cdot \sin \Delta\varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\Delta h \cdot \sin \varphi \left( \cos \varphi \frac{\cos \Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi} - \sin \varphi \right)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\frac{\Delta h \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\operatorname{tg} \Delta\varphi} - \Delta h \cdot \sin^2 \varphi},$$

de  $\operatorname{tg} \Delta\varphi$  az 5. ábra  $ACE$  háromszögéből kifejezhető:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\Delta h \cdot \cos \varphi}{\frac{h}{\sin \varphi} + \Delta h \cdot \sin \varphi},$$

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\Delta h \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{h + \Delta h \cdot \sin^2 \varphi},$$

ezért

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\frac{\Delta h \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\frac{\Delta h \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{h + \Delta h \cdot \sin^2 \varphi}} - \Delta h \cdot \sin^2 \varphi},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{h + \Delta h \cdot \sin^2 \varphi - \Delta h \cdot \sin^2 \varphi},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h \gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{h},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h + \Delta h}{2} \gamma,$$

ha  $\Delta h$  igen kicsi, azaz  $\Delta h \rightarrow 0$ , akkor  $\alpha \rightarrow \varphi$ , tehát  $\sigma_\alpha \rightarrow \sigma_\varphi$ , azaz a feszültség iránya a vízszintessel  $\varphi$  szöget zár be.

Tehát

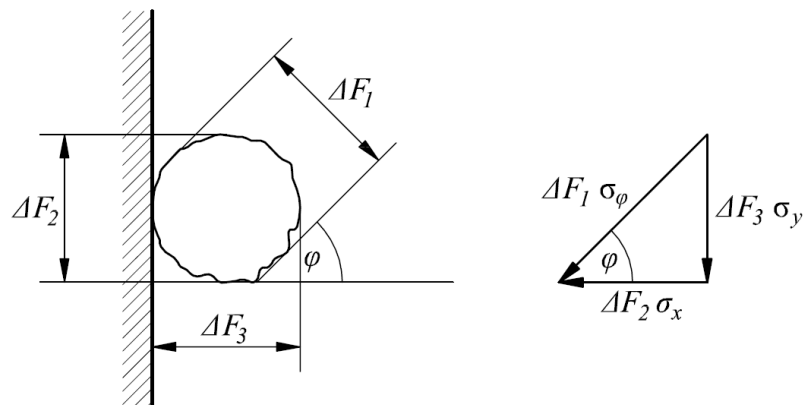
$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2},$$

azaz

$$\sigma_\varphi = \frac{h\gamma}{2}.$$

A levezetés eredményeként megállapítható, hogy a feszültségeloszlás a mélység függvényében lineáris.

Klasszikus értelemben vett feszültségről a szemcsés anyagok esetében azonban nem beszélhetünk, mivel a szemcsék érintkezési pontjain keresztül adják át az erőhatásokat, azaz egy-egy ponton, nem az adott irányra merőleges felületen. Nem felületen, mert az anyag diszkontinuum és a szemcsék csak pontokon érintkeznek egymással. A feszültség értelme így egy felületre jutó átlagerőként értelmezhető és ezek az átlagerők adódnak át egyik szemcséről a szomszédos szemcsékre. Ezen erők iránya és nagysága egy adott felületen statisztikai átlagként érvényesül.



6.ábra A fal melletti szemcsére ható átlagerő felbontása vízszintes és függőleges összetevőre

Vizsgáljuk meg, hogy az imént levezetett  $\sigma_\varphi$  a vízszintessel  $\varphi$  szöget bezáró feszültség egy függőleges falra mekkora erőhatást gyakorol. A 6. ábrán feltüntetett

szemcsére- melyet oldalról egy súrlódásmentes függőleges fal támaszt meg – a szomszédos szemcséktől az érintkezési pontokon keresztül erőhatás érkezik. Ezen erőhatás eredője egyezzen meg a  $\Delta F_1$  felületre számított  $\sigma_\varphi$  feszültség szorzatával, azaz az erre a szemcsére ható nyomóerő nagyságát és irányát tekintve megfelel ezen szemcsés anyag ebben a mélységében rá ható erő statisztikai átlagának. Ez a szemcse nyomja a függőleges súrlódásmentes falat  $\Delta F_2 \sigma_x$  vízszintes irányú erővel a  $\Delta F_2$  falszakaszon az érintkezési ponton. A  $\sigma_y \Delta F_3$  függőleges irányú erőt az alatta lévő szemcse illetve szemcsék veszik fel. A  $\Delta F_1$ ,  $\Delta F_2$  és  $\Delta F_3$  szakaszok statisztikai átlagban egyenlő felületek, mert a szemcsék alakját és elhelyezkedését tekintve statisztikai átlagban gömbök, a gömbök bármely irányban vett vetületei pedig azonos nagyságú felületek. (Ha egy szemcsés anyag – például rizs – hosszúkás szemcsékből áll, a szemcsék véletlenszerű elhelyezkedésére való tekintettel azok bármely irányra vett vetületének átlaga kör, azaz statisztikai átlagban a szemcsék gömbnek tekintendők.)

Tehát a 6. ábra vektorháromszögére felírható

$$\sigma_x \Delta F_2 = \sigma_\varphi \Delta F_1 \cos \varphi,$$

de mivel

$$\Delta F_1 = \Delta F_2,$$

így

$$\sigma_x = \sigma_\varphi \cos \varphi.$$

A fenti megfontolás eredményéből következik, hogy a *szemcsés anyagban a feszültségek* – egy adott felületre számított átlagerők – *vektoriálisan felbonthatók illetve összegezhetők*. A  $\sigma_x = \sigma_\varphi \cos \varphi$  egyenletből a nyugalmi nyomás tényezőjét a

$\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$  helyettesítések után megkapjuk, azaz

$$\sigma_y = h\gamma \qquad \sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi,$$

így

$$\lambda = \frac{\cos \varphi}{2}.$$

A nyugalmi nyomás levezetésénél eddig csak a vízszintessel  $\varphi$  szöget bezáró irányra merőlegesen ható és önsúlyból származó feszültségek által keltett

nyírófeszültségeket vettük figyelembe. A vízszintes irányú feszültségkomponensek -

$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi$  - által kiváltott  $\tau_y$  nyírófeszültségek a függőleges irányú  $h\gamma$

feszültségeket csökkentik  $\tau_y = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi$ -vel,

azaz

$$\tau_y = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

így

$$\tau_y = \frac{h\gamma}{2} \sin \varphi.$$

Tekintettel arra, hogy a szemcsés anyag belsejében felvett  $OA$  elméleti síkra (5. ábra)  $\sigma_\varphi$  feszültségek párosával hatnak, ezért a függőleges irányú  $h\gamma$  feszültségek

$2\tau_y$ -nal csökkennek, tehát

$$\sigma_y = h\gamma - 2\tau_y,$$

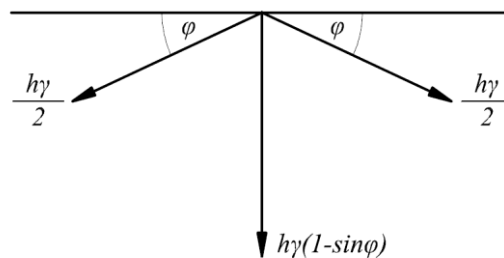
azaz

$$\sigma_y = h\gamma - 2 \frac{h\gamma}{2} \sin \varphi,$$

illetve

$$\sigma_y = h\gamma(1 - \sin \varphi).$$

Tehát a nyugalomban levő kohézió nélküli szemcsés anyag belsejében ható feszültségek ábrája megszerkeszthető (7. ábra).



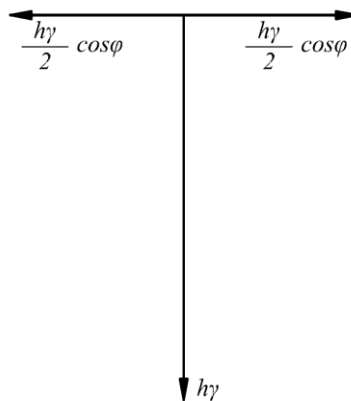
7. ábra Nyugalmi helyzetben ható feszültségek

Amennyiben az 5. ábra szerinti  $OA$  sík a szemcsés anyag belsejében felvett elméleti sík, akkor ott a súrlódás szöge  $\varphi$ . Ebben az esetben az  $OA$  sík mindkét oldalára  $\sigma_\varphi$ ,

a vízszintessel  $\varphi$  szöget bezáró nyomófeszültség hat (7. ábra). Az  $OA$  síkon a  $\sigma_\varphi$ -k elvileg vízszintes és függőleges komponensekre bonthatók (8. ábra). A vízszintes összetevők

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi$$

értékűek, merőlegesek az  $OA$  síkra és kielégítik az akció-reakció törvényét. A  $\sigma_y$  függőleges feszültségkomponensek pedig kölcsönösen az  $OA$  síkra szimmetrikusan – a függőleges feszültségeket  $h\gamma$ -ra egészítik ki.



8. ábra Nyugalmi helyzetben a vízszintes és függőleges feszültségi összetevők

Amennyiben az 5. ábra szerinti  $OA$  sík súrlódásmentes fal, akkor az csak vízszintes feszültséget képes felvenni, azaz  $\sigma_\varphi$  vízszintes összetevőjét, ami

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi.$$

Ugyanakkor a  $\sigma_\varphi$  függőleges összetevője az  $OAB$  anyag függőleges feszültségkomponensét  $h\gamma$ -ra egészíti ki.

Ha az  $OA$  sík érdes, valóságos merev fal, mely az  $OAB$  anyagmennyiség megtámasztására szolgál, akkor a nyugalmi nyomás kialakulása a következők szerint értelmezhető.

Az  $OAB$  anyagmennyiségnek az  $OA$  fal mögé történő feltöltését követően nem alakul ki azonnal a  $\sigma_\varphi \frac{h\gamma}{2}$  értéke, mert a ferde feszültséghatás, illetve a falon ébredő súrlódás miatt az  $OA$  síkon súlyerő-felvétel valósul meg. A súlyerő-felvétel

következtében az  $AB$  síkra ható erő csökken, ez így nem képes létrehozni a  $\frac{h\gamma}{2}$  értékű  $AB$  irányú feszültségeket. A frissen betöltött anyag konszolidációs mozgásának befejeztével nyugalomba jut. A nyugalom eredményeként a falon ébredő súrlódás nullára csökken, tehát a  $\sigma_\varphi$  feszültségek vízszintes és függőleges összetevőjükre bomlanak. A függőleges összetevők az  $OAB$  anyagban a függőleges irányú feszültségkomponenseket  $h\gamma$ -ra, illetve az  $OAB$  anyag súlyát  $\frac{h^2\gamma}{2} \operatorname{ctg} \varphi$ -re egészítik ki. Ekkor az  $OA$  falra a  $\sigma_\varphi$  feszültség vízszintes összetevője hat. Tehát a nyugalmi nyomás vízszintes összetevője:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi,$$

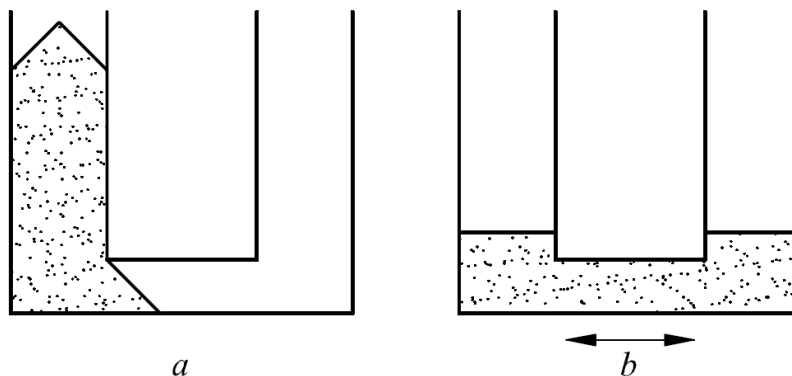
és így a nyugalmi nyomás tényezője ( $\lambda$ ):

$$\lambda = \frac{\cos \varphi}{2}$$

#### IV. törvény

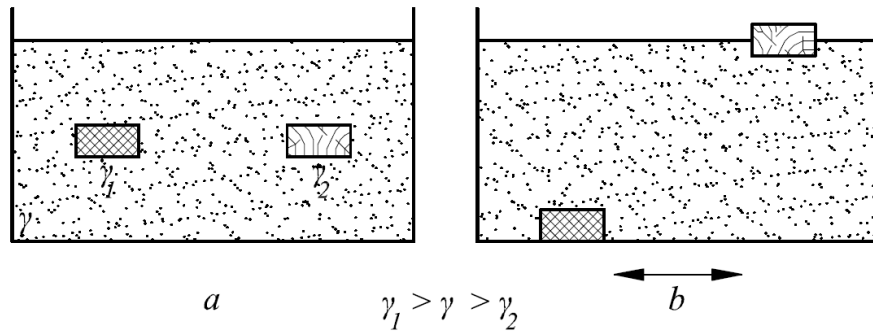
A IV. törvény kísérletileg bizonyítható.

A 9. ábrán bemutatott kísérlet eredményeként a szemcsék ütközése következtében a szemcsés anyag a közlekedő edények törvényei szerint viselkedik.



9. ábra a) nyugalmi helyzet b) vibráció eredményeként kialakult helyzet

A 10. ábrán a  $\gamma$  térfogatsúlyú szemcsés anyagba helyezett  $\gamma_1$  nagyobb és  $\gamma_2$  kisebb térfogatsúlyú test a vibráció, illetve szemcsék ütközése eredményeként az edény aljára süllyed, illetve a szemcsés anyag felszínén úszik, tehát érvényesül Archimedes törvénye.



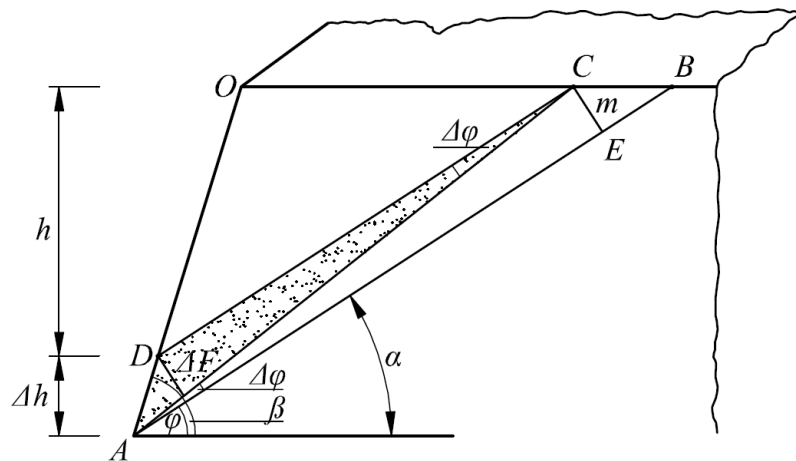
10. ábra a) nyugalmi helyzet b) vibráció eredményeként kialakult helyzet

A vibráció következtében a szemcsés anyag alkotóelemei, a szemcsék egymáshoz ütköznek és ennek hatására bennük a nyomás minden irányban  $h\gamma$ -ra változik.



## Feszültségek a kohézió nélküli szemcsés anyagokban

A III. törvény bizonyítási eljárásánál függőleges síkkal kimetszett vízszintes felszínű térszég vizsgálatát végeztük el. Ha ez a sík a függőlegeshez képest az anyag felé dől – a vízszintessel  $\beta$  szöget zár be – , és a felszín vízszintes, akkor a korábbi levezetést általánosítva meghatározható, hogy ezen halmaznak mekkora az oldalnyomása a  $\beta$  szögű síkban.

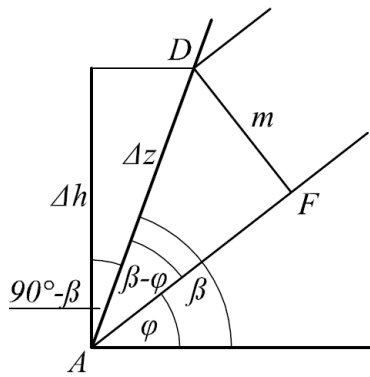


11. ábra Vízszintes térszín ferde síkkal határolt végtelen térszég

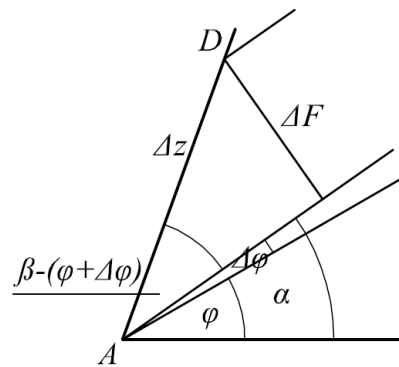
A 11. ábra jelöléseit felhasználva a  $\Delta h$ -val növelt mélység eredményeként létrejövő  $\alpha = \varphi + \Delta\varphi$  hajlásszögű lejtőn az  $ADC$  szemcsés anyag lejtőre önsúlyával ( $\Delta G$ ) és a felette levő anyag súlyával ( $G$ ) nehezedik. Az  $ADC$  anyagmennyiséget lecsúszás ellen a  $\Delta h$  szakasz támasztja meg. Tekintve, hogy a  $\Delta h$  igen kicsi, ezért ott a feszültségeloszlás egyenletesnek tekinthető, így az ott ébredő lejtő irányú feszültségre felírható:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{(G + \Delta G)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\Delta F},$$

ahol a  $\Delta F$  a  $\Delta h$  felületszakasz lejtőre merőleges vetülete.



12. ábra A 11. ábra  $\Delta h$  részlete



13. ábra A 11. ábra  $\Delta F$  részlete

Az egyenletben szereplő  $G$ ,  $\Delta G$  és  $\Delta F$  egységnyi hosszúságú térrészre a 11., 12., illetve 13. ábrából kifejezhető:

$$G = \frac{h^2 \gamma}{2} (\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \beta),$$

és

$$\Delta G = \frac{m}{2} \cdot \frac{h}{\sin \varphi} \cdot \gamma,$$

ahol  $m$  a 11. ábra segítségével kifejezhető:

$$m = \Delta z \cdot \sin(\beta - \varphi), \text{ és } \Delta z = \frac{\Delta h}{\cos(90^\circ - \beta)},$$

így

$$m = \frac{\Delta h}{\cos(90^\circ - \beta)} \sin(\beta - \varphi),$$

azaz

$$m = \frac{\Delta h}{\sin \beta} \sin(\beta - \varphi),$$

$m$  értékét a  $\Delta G$ -re felírt összefüggésbe helyettesítve:

$$\Delta G = \frac{h\Delta h\gamma}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin \beta}.$$

A  $\Delta F$  értéke a 13. ábra segítségével kifejezhető:

$$\Delta F = \Delta z \sin[\beta - (\varphi + \Delta\varphi)],$$

$$\Delta F = \frac{\Delta h}{\sin \beta} \sin[\beta - (\varphi + \Delta\varphi)]$$

A  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha = \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi}$  egyenlőség II. törvény bizonyítása során került

levezetésre.

A  $G$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta F$  és  $\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha$  értékeit a  $\sigma_\alpha$ -ra felírt összefüggésbe behelyettesítve:

$$\sigma_\alpha = \frac{\frac{h^2\gamma}{2}(\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \beta) + \frac{h\Delta h\gamma}{2} \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin \beta}}{\frac{\Delta h}{\sin \beta} \sin[\beta - (\varphi + \Delta\varphi)]} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\cos \varphi},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi \sin \beta}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{h(\operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \beta) + \Delta h \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin \varphi \cdot \sin \beta}}{\sin[(\beta - \varphi) - \Delta\varphi]},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{h(\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta) + \Delta h \frac{\sin \beta \cdot \cos \varphi - \cos \beta \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi}}{\sin(\beta - \varphi) \cdot \cos \Delta\varphi - \cos(\beta - \varphi) \cdot \sin \Delta\varphi},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{1}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{h(\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta) + \Delta h(\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta)}{\operatorname{ctg} \Delta\varphi \cdot \sin(\beta - \varphi) - \cos(\beta - \varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta}{\operatorname{ctg} \Delta\varphi \cdot \sin(\beta - \varphi) - \cos(\beta - \varphi)},$$

de  $\operatorname{ctg} \Delta\varphi$  a 11. ábra  $ACE$  háromszögből a 12. ábra  $ADF$  háromszögének felhasználásával kifejezhető:

$$\operatorname{ctg} \Delta\varphi = \frac{\overline{AE}}{m} = \frac{\overline{CD} + \overline{AF}}{m},$$

ahol:  $\overline{CD} = \frac{h}{\sin \varphi}$  és  $\overline{AF} = \Delta z \cdot \cos(\beta - \varphi),$

de 
$$\Delta z = \frac{\Delta h}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{\Delta h}{\sin \beta},$$

ezért 
$$\overline{\Delta F} = \frac{\Delta h}{\sin \beta} \cos(\beta - \varphi),$$

így

$$ctg \Delta \varphi = \frac{\frac{h}{\sin \varphi} + \frac{\Delta h}{\sin \beta} \cos(\beta - \varphi)}{m},$$

mivel 
$$m = \frac{\Delta h}{\sin \beta} \sin(\beta - \varphi),$$

$$ctg \Delta \varphi = \frac{\frac{h}{\sin \varphi} + \frac{\Delta h}{\sin \beta} \cos(\beta - \varphi)}{\frac{\Delta h}{\sin \beta} \sin(\beta - \varphi)},$$

$$ctg \Delta \varphi = \frac{h \sin \beta + \Delta h \sin \varphi \cdot \cos(\beta - \varphi)}{\Delta h \sin \varphi \cdot \sin(\beta - \varphi)},$$

$$ctg \Delta \varphi = \frac{h \sin \beta}{\Delta h \sin \varphi \cdot \sin(\beta - \varphi)} + ctg(\beta - \varphi);$$

$ctg \Delta \varphi$  értékét  $\sigma_\alpha$  összefüggésébe behelyettesítve:

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{ctg \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta}{\frac{h \sin \beta \cdot \sin(\beta - \varphi)}{\Delta h \sin \varphi \cdot \sin(\beta - \varphi)} + \frac{\cos(\beta - \varphi) \cdot \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} - \cos(\beta - \varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{h + \Delta h}{\Delta h \cos \varphi} \cdot \frac{ctg \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta}{\frac{h \sin \beta}{\Delta h \sin \varphi} + \cos(\beta - \varphi) - \cos(\beta - \varphi)},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{(h + \Delta h)(ctg \varphi \cdot \sin \beta - \cos \beta) \sin \varphi}{h \sin \beta \cdot \cos \varphi},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{h + \Delta h}{2} \gamma (1 - ctg \beta \cdot tg \varphi),$$

ha  $\Delta h$  igen kicsi, azaz  $\Delta h \rightarrow 0$ , akkor  $\alpha \rightarrow \varphi$ , tehát  $\sigma_\alpha \rightarrow \sigma_\varphi$ , azaz a feszültség iránya a vízszintessel  $\varphi$  szöget zár be.

Tehát

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \sigma_\alpha = \frac{h\gamma}{2} (1 - ctg \beta \cdot tg \varphi),$$

azaz

$$\sigma_{\varphi} = \frac{h\gamma}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} \right)$$

A  $\sigma_{\varphi}$  vízszintes összetevője pedig:

$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \beta} \right).$$

A sík vízszintessel bezárt hajlásszögének,  $\beta$ -nak három különleges értékét vizsgálva megállapítható, hogy ha  $\beta = \varphi$ , akkor  $\sigma_{\varphi} = 0$ , azaz szabad rézsűben megtámasztás nélkül megáll a kohézió nélküli szemcsés anyag.

Ha  $\beta = 90^{\circ}$ , akkor e síkra ható nyugalmi nyomás értéke:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{h\gamma}{2} \text{ illetve } \sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi.$$

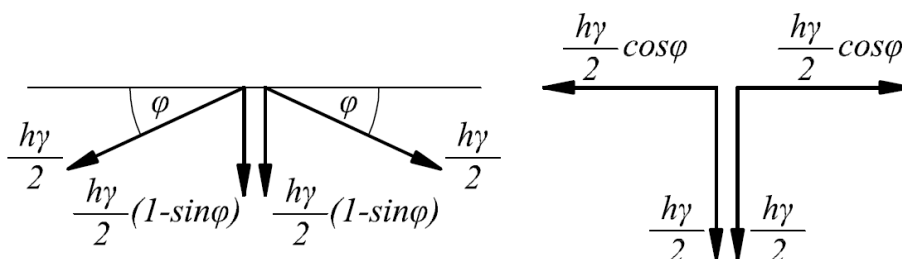
Ha  $\beta = 45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}$ , akkor a síkra ható nyugalmi nyomás értéke:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin \varphi} \text{ illetve } \sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \operatorname{tg} \left( 45^{\circ} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

## Aktív feszültségi állapot

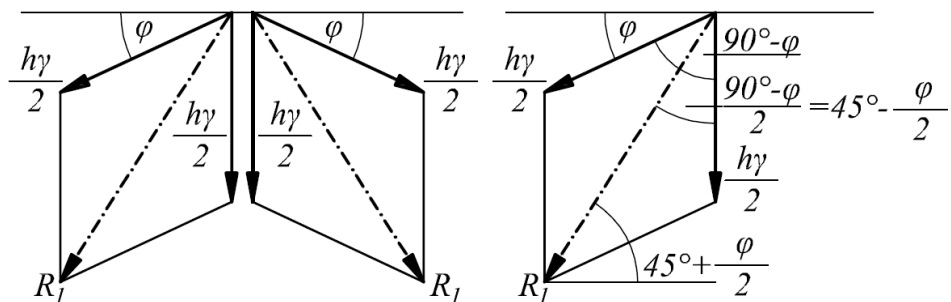
### Az aktív feszültségi állapot kialakulása

Nyugalomban levő, kohézió nélküli szemcsés anyagot megtámasztó függőleges fal kismértékű vízszintes irányú elmozdulása – elbillenése – az anyagban expansziót okoz. A vízszintes irányban történő támfalelmozdulást az anyag mozgása fellazulva követi, mely az anyag belsejének egy adott pontja szempontjából relatíve két irányú elmozdulásként jelentkezik. Az expansziót követő elmozdulás eredményeként a nyugalmi nyomás vízszintes feszültségkomponensei által mobilizált nyírófeszültségek hatása megszűnik (felszakad). Az anyag belsejében a relatíve két irányú elmozdulás a függőleges irányú nyírófeszültségeket párosával szakítja fel, ezáltal a függőleges feszültség  $h\gamma$ -ra növekszik. Ezzel egyidejűleg az anyag konszolidációs mozgása is bekövetkezik.



14. ábra Feszültségi modell nyugalmi helyzetben

A 7. illetve 8. ábra függőleges feszültsége (nyugalmi helyzet) felbontható két azonos irányú és nagyságú feszültségre (14. ábra). Az így nyert feszültségi modell változásával magyarázható a vízszintes felületű, kohézió nélküli szemcsés anyagokban az aktív feszültségi állapot kialakulása. Az expansió hatására felszakadt nyírófeszültségek a 14. ábra feszültségi modelljét a 15. ábra szerintire változtatja.



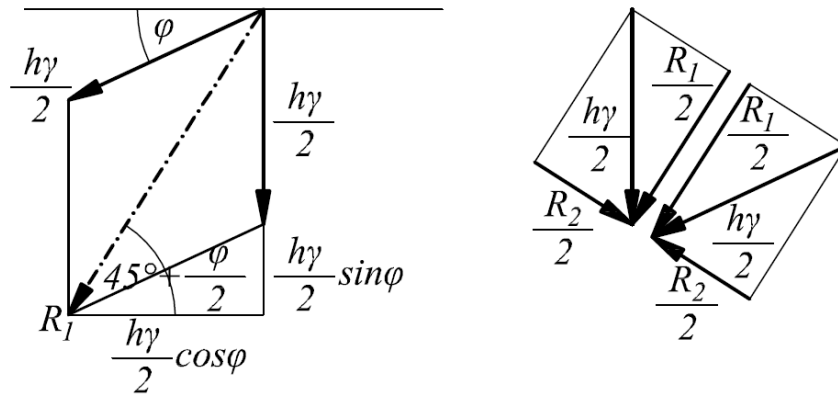
15.ábra A feszültségi modell változása aktív állapotban

A konszolidációs mozgás a legnagyobb feszültségek, azaz a feszültségek eredőinek irányában következik be. A feszültségpárok eredőinek iránya – a 15. ábrából leolvasható – a vízszintessel  $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  szöget és egymással  $90^\circ - \varphi$  szöget zárnak be. E feszültségi állapot a ható (eredő) feszültségi irányokat tekintve tehát megegyezik a Rankine-féle aktív feszültségi állapottal. A konszolidációs mozgást az  $R_1$  feszültség indítja meg. E mozgást az  $R_1$  feszültségre merőleges  $R_2$  feszültség  $\operatorname{tg} \varphi$ -szerese csökkenti, azaz az  $R_1$  feszültség nyírófeszültséget mobilizál. A vízszinteshez  $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  szögben hajló irányban érvényesülő  $K$  feszültség nagysága tehát

$$K = R_1 - R_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Az  $R_1$  feszültség két feszültség. Az  $R_1$  és  $R_2$  feszültség a 16. ábra feszültségi vektor ábráiból kifejezhető.

Az  $R_1$  feszültség két feszültség összegeként jelentkezik, melynek erre az irányra vett feszültség-komponenseinek összege ( $R_2$ ) ébreszti a nyírófeszültséget.



16. ábra Az eredő feszültség által megindított mozgás nyírófeszültséget mobilizál

$$R_1 = 2 \frac{h\gamma}{2} \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

és

$$R_2 = 2 \frac{h\gamma}{2} \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

így

$$K = h\gamma \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg} \varphi \cdot h\gamma \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right).$$

A K eredő feszültség vízszintes komponense:

$$K_h = K \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$K_h = h\gamma \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - h\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$K_h = h\gamma \left[ \frac{1}{2} \sin 2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi) \right],$$

mert

$$\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi),$$

ugyanis

$$\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]^2,$$



$$\begin{aligned}\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} - \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\right]^2, \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\cos\varphi}{2} - 2\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2} \cdot \frac{1-\cos\varphi}{2}} + \frac{1-\cos\varphi}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - 2\sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{4}}\right], \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sin\varphi).\end{aligned}$$

$$K_h = \frac{h\gamma}{2}\left[\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(1 - \sin\varphi)\right],$$

$$K_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos^2\varphi - \sin\varphi(1 - \sin\varphi)}{\cos\varphi},$$

$$K_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos^2\varphi - \sin\varphi + \sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

$$K_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\boxed{K_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

A  $K$  eredő feszültség függőleges komponense  $K_v$ .

$$K_v = K \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$K_v = h\gamma \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tg}\varphi \cdot h\gamma \cdot \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\text{mivel } \sin^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin\varphi) \quad \text{és} \quad \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\varphi,$$

$$\text{így } K_v = \frac{1}{2}h\gamma(1 + \sin\varphi - \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi),$$

$$K_v = \frac{1}{2}h\gamma\left(1 + \sin\varphi - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\varphi\right),$$

$$K_v = \frac{h\gamma}{2}.$$

A  $K$  eredő feszültség

$$K = \sqrt{K_h^2 + K_v^2},$$

$$K = \frac{h\gamma}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) + 1},$$

$$K = \frac{h\gamma}{2} \sqrt{\frac{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

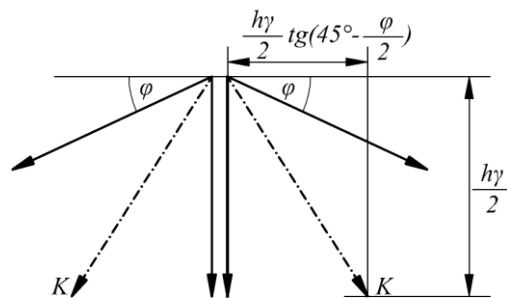
$$K = \frac{h\gamma}{2} \sqrt{\frac{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$K = \frac{h\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}},$$

$$K = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

A  $K$  értékét összehasonlítva a  $\sigma_\varphi$  értékével – mely  $\frac{h\gamma}{2}$  - belátható, hogy a  $K$  nagyobb. Ezért expanzió esetén illetve a szemcsés anyagot megtámasztó fal jelentősebb elmozdulása esetén az anyag mozgási iránya a vízszintessel  $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  szöget zár be.

Az expanzió következtében tehát a mozgást elindító feszültség a 17. ábra szerinti.



17. ábra Aktív állapotban a mozgást elindító feszültség

A mozgás a feszültségek eredőinek irányában, tehát a vízszintessel  $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  szöget bezáró irányban valósul meg. Az anyag teljes mennyiségében mozog, azaz végtelen sok a vízszinteshez  $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$  szögben hajló csúszólap alakul ki.

A  $K$  eredő feszültség vízszintes összetevője  $\sigma_x$ , azaz

$$\sigma_x = K \cdot \cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = K \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

### **Függőleges támfalra ható nyomás**

Ha a vízszintes felszínű kohézió nélküli szemcsés anyagot valóságos súrlódásos függőleges fal támasztja meg és elmozdulása következtében az anyagban expanzió következik be, a falra ható feszültségek a falon ébredő súrlódás szögének ( $\delta$ ) ismeretében meghatározhatók:

A falra  $\sigma_\delta$  nagyságú és a vízszintessel  $\delta$  szöget bezáró feszültség hat. E feszültség  $\sin \delta$ -szorosára csökkenti a  $\frac{h\gamma}{2}$  függőleges feszültséget  $\frac{h\gamma}{2} - \sigma_\delta \sin \delta$ -ra. A függőleges feszültséggel egyenesen arányos a vízszintes feszültség összetevő: a  $\sigma_\delta \cos \delta$ , éppen úgy, mint ahogy az anyag belsejében ható feszültségi modellben a

$\frac{h\gamma}{2}$  függőleges és a  $\frac{h\gamma}{2} \cos \varphi$  vízszintes feszültségi összetevő aránya állandó. Tehát az aránypár felírható:

$$\frac{\frac{h\gamma}{2}}{\frac{h\gamma}{2} \cdot \cos \varphi} = \frac{\frac{h\gamma}{2} - \sigma_{\delta} \sin \delta}{\sigma_{\delta} \cos \delta}.$$

A  $\sigma_{\delta}$  kifejezhető:

$$\frac{h\gamma}{2} \sigma_{\delta} \cdot \cos \delta = \frac{h\gamma}{2} \left( \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi - \sigma_{\delta} \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi \right),$$

$$\sigma_{\delta} \cdot \cos \delta + \sigma_{\delta} \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi,$$

$$\sigma_{\delta} (\cos \delta + \sin \delta \cdot \cos \varphi) = \frac{h\gamma}{2} \cos \varphi,$$

$$\sigma_{\delta} = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \delta + \sin \delta \cdot \cos \varphi}.$$

A  $\sigma_{\delta}$  vízszintes összetevője  $\sigma_h$ :

$$\sigma_h = \sigma_{\delta} \cos \delta,$$

$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\cos \delta + \sin \delta \cdot \cos \varphi},$$

$$\boxed{\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \varphi}}.$$

A kapott eredmény megmutatja, ha a támfalon nem ébredne súrlódás, úgy arra a nyugalmi nyomás hatna; megfordítva: a nyugalmi nyomás kialakulásakor a támfalon nem ébred súrlódás. Ezt a modellkísérletek tapasztalatai igazolják.

Ha a támfalon ébredő súrlódás megegyezne a szemcsés anyag belsejében ébredő súrlódással, azaz  $\delta = \varphi$ , akkor a támfalra az az aktív nyomás hatna, amely az anyag belsejében is uralkodik aktív feszültségi állapotban. Ha a  $\delta$  nem éri el a  $\varphi$  értékét, úgy a támfal mellett átmeneti – a nyugalmi és aktív nyomás közötti – állapot uralkodik.

Száraz homokkal – kohézió nélküli szemcsés anyaggal – a múltban többen végeztek kísérleti méréseket az oldalnyomás meghatározására. Pontosság és a modell mérete szempontjából Terzaghi 1929-ben elkezdett kísérletei emelkednek ki közülük, ahol a támfal 2,1 méter magas és 4,2 méter hosszú merev vasbetonszerkezet volt. A homokszekrény űrtartalma  $37 \text{ m}^3$  volt és a fal elmozdulását 0,0025 mm pontossággal mérték. A kísérleti eredményeket az alábbiak szerint foglalhatók össze:

Amíg a támfal mozdulatlan volt, addig arra  $E_0 = 0,42 \frac{h^2 \gamma}{2}$  nagyságú és vízszintes irányú nyugalmi nyomás hatott. A falnak kismértékű elmozdulásakor az oldalnyomás lecsökkent, majd a támfal további elmozdulása, elbillenése következtében az oldalnyomás vízszintes összetevője  $0,29 \frac{h^2 \gamma}{2}$  érték közelében állandósult, miközben a támfalon ébredt súrlódás szögének tangense  $tg \delta = 0,54$  érték közelében mozgott. A homokban kialakult az expanzió, a fellazulás és a térszín a elmozduló fal közelében lesüllyedt.

A mért értékek jól egyeznek az imént levezetett elméleti képletekkel kapott eredményekkel:

- a nyugalmi nyomás tényezője,  $\lambda = 0,42$  volt,

$$\lambda = \frac{\cos \varphi}{2},$$

$$\cos \varphi = 2 \cdot 0,42,$$

$$\varphi = 32,85^\circ, \text{ mely száraz homokra jellemző érték.}$$

- a súrlódásos támfalra ható nyomás vízszintes feszültségi összetevője:

$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + tg \delta \cdot \cos \varphi},$$

a mért érték  $\cos \varphi = 0,84$  és  $tg \delta = 0,54$ ,

$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{0,84}{1 + 0,54 \cdot 0,84},$$

$$\sigma_h = h\gamma \cdot 0,2889,$$

azaz a számított  $0,2889 \approx 0,29$  körüli mért értékkel igen jó egyezést mutat.

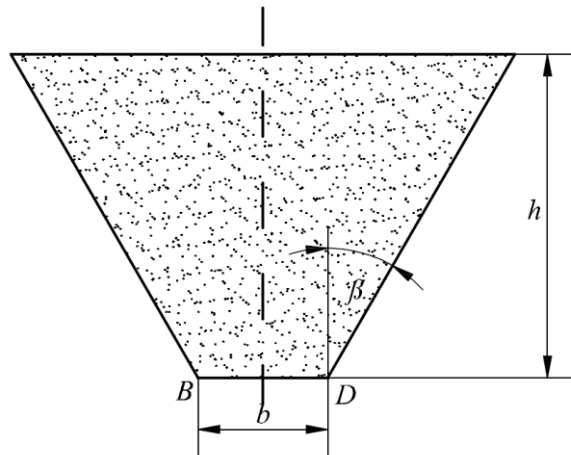
## **Boltozatképződés szemcsés anyagokban**

A boltozatképződés jelensége a szemcsés anyagok mechanikájának egyik alapkérdése. A boltozat kialakulásának elméleti tisztázása lehetővé teszi az olyan közvetlen gyakorlati probléma megoldását, mint a szemcsés anyagok ömlesztett silós tárolását, illetve a biztonságos kitárolást. A silók garataiban az anyag gyakran összeáll, vagy boltozat képződik, mely a gravitációs kitárolást megakadályozza.

### **A boltozat kialakulásának feltétele**

A boltozat kialakulását minden esetben az anyag egy részének elmozdulása váltja ki. Ez a mozgás származhat a konszolidációból, tömörödésből vagy például a garat alján levő zsilip kinyitását követő anyagmozgásból. Az elmozdulás következtében az anyagban levő feszültségek átrendeződnek úgy, hogy a helyben maradó megtámasztó rész veszi át az elmozduló rész feszültségeinek egy részét is. Ha az így módon kialakult feszültségek elég nagyok és irányuk is megfelelő, akkor az anyagban kialakul a boltozat, mely a további elmozdulást már meggátolja. Az elmozdulás boltozatkialakító hatása akkor érvényesül, ha az anyagnak elmozdulása során fajlagos alakváltozást kell elszenvednie, azaz például szűkülő keresztmetszeten kell átjutnia.

Az előbbi megfontolások alapján a boltozat kialakulásának követéséhez, kiindulásként egy végtelen hosszú, szűkülő keresztmetszetű szimmetrikus vályú választható, melyben kohézió nélküli szemcsés anyag van (18. ábra).

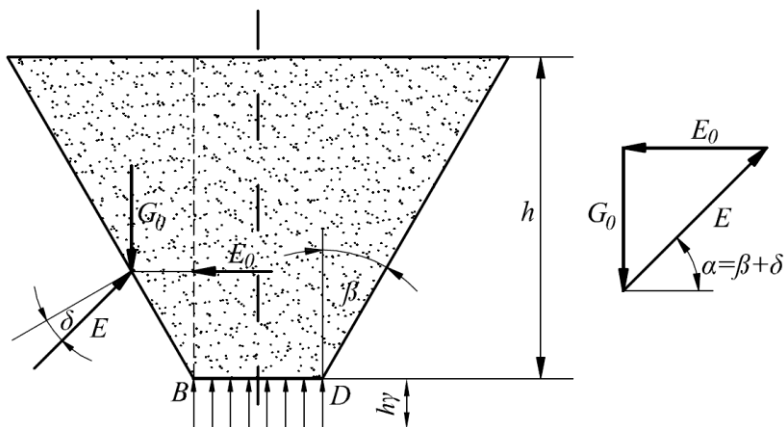


18. ábra A vályú méretei

Feltételezzük, hogy az anyag térfogatsúlya ( $\gamma$ ) a mélység függvényében nem változik és a betöltést követően nem tömörödik. A függőlegeshez  $\beta$  szöggel kifelé hajló sík és merev oldalfalú vályú  $b$  szélességű alsó nyílását elmozdítható fenéklap zárja le. A végtelen hosszúság feltételezése az eset síkbeli vizsgálatát teszi lehetővé. A vályú fenéklapjának elvétele után az anyag elmozdul – ki akar folyni – és a szűkülő keresztmetszet miatt fajlagos alakváltozást szenved, tehát a modell biztosítja a boltozat kialakulásának előzőekben vázolt feltételeit.

Amennyiben a szemcsés anyag nyugalmi helyzetben van és az oldalfalak merevek, az anyag belsejében kialakul a nyugalmi nyomás, tehát függőleges irányban  $h\gamma$  és vízszintes irányban  $\lambda h\gamma$ , ahol  $\lambda$  a függőleges és vízszintes nyomás hányadosa, azaz a nyugalmi nyomás tényezője.

A függőlegeshez  $\beta$  szöggel kifelé hajló oldalfalra ható feszültségek, illetve a feszültségek eredő ereje ( $E$ ) nagyság és irány szerint a 19. ábra alapján meghatározható:



19. ábra Szemcsés anyaggal töltött zárt fenéklapú vályú erőegyensúlya

$G_0$  a függőleges sík és a  $\beta$  szöggel kifelé hajló oldalfal közötti anyagrészt súlya:

$$G_0 = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg} \beta,$$

$E_0$  a vízszintes irányú nyugalmi nyomás eredő ereje:

$$E_0 = \lambda \frac{h^2 \gamma}{2}.$$

A vektorháromszögből az eredő erő:

$$E = \frac{h^2 \gamma}{2} \sqrt{\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Az eredő erő vízszintes sikkal bezárt hajlásszögére felírható:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G_0}{E_0},$$

azaz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\lambda}.$$

Amennyiben  $\alpha$  irányú erőt, illetve feszültségeket az oldalfal a súrlódás miatt fel tud venni, akkor a fenéklapra csak függőleges irányú és  $h\gamma$  nagyságú feszültségek hatnak. Ez akkor áll fenn, ha  $\alpha \leq \beta + \delta$ , ahol  $\delta$  az oldalfalon, a fal és az anyag között ébredő súrlódás szöge.

A vályú kifolyónyílását elzáró vízszintes lap elvétele után az anyag belsejében nyírási síkok alakulnak ki, tekintve, hogy a szűkülő keresztmetszeten az anyag csak



nyírás útján tud átjutni. Ha  $\alpha \leq \beta + \delta$ , azaz a vízszintes lapra korábban csak függőleges feszültségek hatottak, akkor a nyírás síkja függőleges lesz. Ugyanis az anyag azon a felületen nyíródik el, melyhez a legkisebb erő szükséges. A kohézió nélküli szemcsés anyag nyírásához szükséges erőt a *Coulomb* egyenlet felhasználásával a  $F = A\sigma_n \operatorname{tg} \varphi$  összefüggés fejezi ki, ahol

$A$  – a nyírt felület,

$\sigma_n$  – a nyírt felületre ható merőleges feszültség,

$\varphi$  – az anyag súrlódási szöge.

A legkisebb nyíróerő a függőleges sík elnyírásához szükséges, mivel itt a legkisebb a nyírt felület és a vízszintes irányú feszültségek is e síkban a legkisebbek. (A vízszintes feszültségek mindig kisebbek, mint a függőleges vagy közbensőirányúak) Tehát a nyírás síkja a függőleges.

A vályú  $B$  és  $D$  pontjából egy-egy függőleges irányú nyírasi sík akkor alakul ki, ha a  $b$  nyílás fölötti anyagrész súlyából származó függőleges irányú erő megegyezik a két sík nyírasi erőszükségletével:

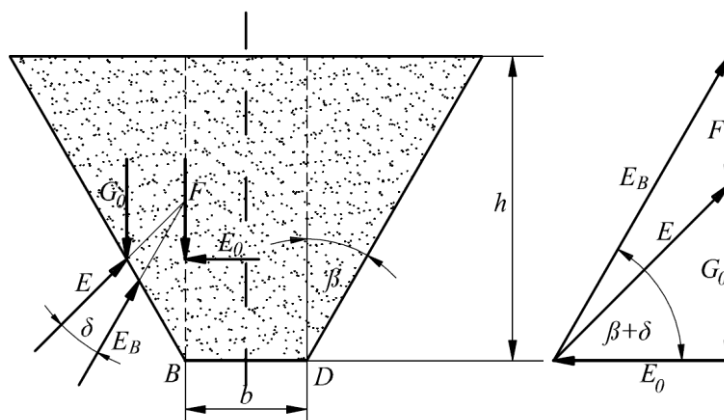
$$b \cdot h \cdot \gamma = 2\lambda \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

azaz

$$b = h\lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Ha a  $b$  méret ezen értéknél nagyobb, akkor a  $\lambda h \cdot \operatorname{tg} \varphi$  szélességű anyag egy tagban szakad ki és a vályú teljes  $b$  nyílásáig a – fellépő nyírófeszültségek hatására – magával ragadja a többi anyagrészt.

Amennyiben a  $b \leq \lambda h \cdot \operatorname{tg} \varphi$ , akkor csupán két függőleges irányú nyírasi felület alakul ki a vályú kifolyónyílását elzáró lap elvétele után. Ekkor az anyag belsejében a nyírasi síkon nyírasi feszültségek ébrednek, melyet a  $b \cdot h \cdot \gamma$  függőleges irányú súlyerő hív életre. A függőleges  $F$  nyíróerőket a nyírasi sík és a vályú oldalfala közötti anyagrész veszi fel, átadva azt az oldalfalakra. Az oldalfal ezt a függőleges irányú plusz erőt csak akkor képes maradéktalanul felvenni, ha az eredő erő ( $E_B$ ) nem lép ki az oldalfalon ébredő súrlódási szögből.



20. ábra A vályú fenéklapjának eltávolításakor az erőegyensúly

A 20. ábra vektorpoligonján jól látható, hogy az  $E_B$  eredő erő akkor nem lép ki a  $\delta$  súrlódási szögből, ha az oldalfal dőlésszöge és az ott ébredő súrlódás elég nagy, azaz  $\alpha \leq \beta + \delta$ . A vektorábrából a határesetre felírható

$$\operatorname{tg}(\beta + \delta) = \frac{F + G_0}{E_0}.$$

Az  $F$  nyíróerő a nyílás feletti anyagsúly fele, mivel két nyírási síkra oszlik meg, tehát

$$F = \frac{bh\gamma}{2},$$

továbbá

$$G_0 = \frac{h^2\gamma}{2} \operatorname{tg}\beta \text{ és } E_0 = \lambda \frac{h^2\gamma}{2}.$$

Behelyettesítve  $F$ ,  $G_0$  és  $E_0$  értékeit a  $\operatorname{tg}(\beta + \delta)$ -ra felírt összefüggésbe:

$$\operatorname{tg}(\beta + \delta) = \frac{\frac{bh\gamma}{2} + \frac{h^2\gamma}{2} \operatorname{tg}\beta}{\lambda \frac{h^2\gamma}{2}},$$

egyszerűsítve:

$$\operatorname{tg}(\beta + \delta) = \frac{b + h \cdot \operatorname{tg}\beta}{\lambda h}$$

tehát, ha  $b \leq \lambda h \cdot \operatorname{tg}\varphi$ , akkor a vályú alsó nyílásából kiindulva egy-egy nyírási sík keletkezik és a köztük levő anyagrész súlyát a nyírófeszültségek áthelyeződése révén az oldalfal akkor tudja felvenni, ha

$$\operatorname{tg}(\beta + \delta) \geq \frac{b + h \cdot \operatorname{tg}\beta}{\lambda h}.$$

Ebben az esetben az anyag nem tud kifolyni és a nyílás fölött kialakul a boltozat. A

$b \leq \lambda h \cdot \operatorname{tg} \varphi$  és a  $\operatorname{tg}(\beta + \delta)$ -ra kapott összefüggésből a  $\frac{b}{h}$  viszony kifejezhető:

$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta.$$

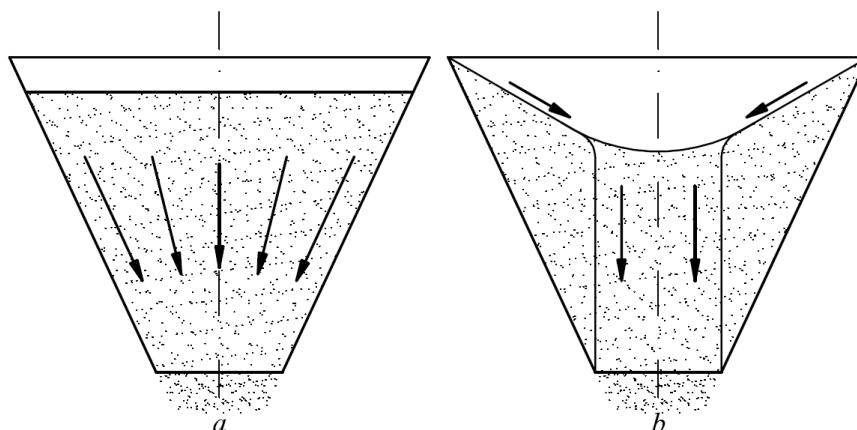
A kohézió nélküli szemcsés anyagban a boltozat kialakulásának feltételét e két egyenlőség illetve egyenlőtlenség fogalmazza meg.

A boltozat kialakulásának eredő erőkkel számolt megoldása szerint az  $F$  nyíróerő a nyugalmi helyzet  $E$  eredő erejének támadáspontját a vályú alsó nyílása felé téríti el. Az  $E_B$  helyzetét az  $E$  és  $F$  erők hatásvonalának metszéspontja határozza meg. Az eltérés a  $\beta$  szög növekedésével áll egyenes arányban. A gyakorlati számításoknál ez az eltérés figyelmen kívül hagyható. Ugyanis a  $\beta$  szög jelentős növelése esetén a boltozat már közvetlenül az anyagra és nem az oldalfalra támaszkodik (lásd később).

### A kifolyás jellege

Az előzőekben levezetett boltozati feltételekkel értelmezhető a vályúból kifolyó szemcsés anyag kifolyásának jellege akkor, ha valamelyik feltétel nincs teljesítve.

a) Ha  $\alpha > \beta + \delta$ , azaz  $\frac{b}{h} > \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta$ , akkor az oldalfal nem képes teljes egészében felvenni a nyírófeszültségek áthelyeződése miatt megváltozott eredő erőt. Az  $E$  eredő erőnek az oldalfallal párhuzamos szabad összetevője az oldalfal mentén megindítja az anyag csúszását. A függőleges nyírásí sík és az oldalfal közötti anyagrész is megmozdul és tömegfolyás alakul ki (21/a. ábra).



21. ábra Jellegzetes kifolyások: a) tömegkifolyás; b) alagútfolyás

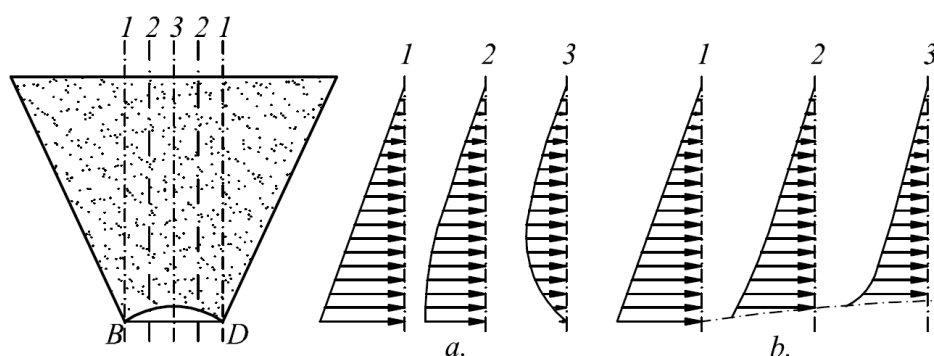
b) Ha  $\alpha < \beta + \delta$ , azaz  $\frac{b}{h} < \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg}\beta$ , de  $b > \lambda h \cdot \operatorname{tg}\varphi$  illetve  $\frac{b}{h} > \lambda \cdot \operatorname{tg}\varphi$ , akkor ugyan az oldalfal fel tudja venni az eredő erőt, de a nyílás fölötti anyag súlyereje nagyobb, mint a kiszakadást meggátló nyíróerő, ezért a  $b$  szélességű anyag függőlegesen kifolyik, míg a mellette levő anyagrészt – a függőleges nyírás sík és az oldalfal közötti rész – helyben marad, majd felülről folyik hozzá a függőlegesen mozgó anyagrésszhez. Kialakul az alagútfolyás (21/b. ábra).

Könnyen belátható, hogy a kifolyás jellegét nem csupán a vályú dőlésszöge és falsúrlódása határozza meg, hanem az anyag nyírás ellenállása, súrlódási szöge, illetve nyomásviszonyai is. Silókban megfigyelhető, hogy egyes szemcsés anyagok először tömegkifolyással, majd később alagútkifolyással ürülnek, bizonyítva azt, hogy a garatban uralkodó nyomásviszonyok is befolyásolják – bár kisebb mértékben, mint a garat dőlésszöge és súrlódása – a kifolyás jellegét. Búzával és homokkal különböző dőlésszögű garatokkal végzett kísérleteinknél (egyazon garatnál és anyagnál) először tömegfolyást, majd az ürítés folytatásakor alagútfolyást figyelhetünk meg. Az anyagkifolyás jellegének változása az előre számított magassági értéknél következett be.

## A boltozat kialakulásának mechanizmusa

A boltozat kialakulásának feltétele tehát, hogy a vályú alsó nyílása fölötti anyag súlyereje kisebb legyen, mint a nyírási síkokon ébredő nyíróerők összege és az oldalfalakra ható erőket az oldalfalak a dőlésszögük és falsúrlódásuk következtében fel tudják venni.

A vályú alsó nyílását elzáró lap elvétele után ébredő nyírófeszültségek az oldalfalra helyeződnek át, és az ott ható feszültségekkel összegeződnek. Ezek az eredő feszültségek alakítják ki a boltozatot. A boltozati felület újabb feszültségátrendeződés eredményeként jön létre.



22. ábra A boltív feszültségátrendeződés következtében alakul ki

A vályú  $B$  és  $D$  éle között az eredő feszültségek vízszintes összetevőinek eloszlása a 22/a. ábra szerinti. Azokon a helyeken, ahol a nyomófeszültségek vízszintes komponensei kevésnek bizonyulnak az anyag gravitáció elleni megtámasztására – a nyírási ellenállása kisebb, mint a gravitációból származó súlyereje – ott az anyag kipereg. A kipergés következtében a feszültségek átrendeződnek, feltehetően a 22/b. ábra szerint úgy, hogy elegendő nyomófeszültség legyen az anyag megtartásához. A kipergés akkor szűnik meg, ha a boltozati felület minden pontján azonos, a kipergés szempontjából kritikus nagyságú, vízszintes irányú feszültségkomponensek hatnak. Az a tény, hogy a boltív minden pontján azonos nagyságú vízszintes

feszültségkomponensnek kell hatnia, lehetővé teszi a boltív geometriai alakját leíró egyenlet meghatározását.

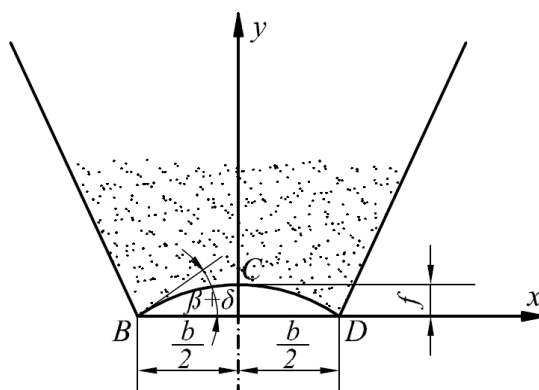
### A boltív geometriai egyenlete

Ismeretes, hogy ha egyenletesen megoszló terhelés alátámasztására olyan másodfokú parabolát használunk, melynek végpontjában csak tangenciális feszültség ébred, akkor a parabola minden pontján csak parabola irányú és azonos nagyságú vízszintes komponensű feszültség ébred. Az ilyen parabolát hajlító nyomaték nem terheli, mely szükséges feltétel. A hajlító nyomaték húzási és nyomási feszültségeket ébresztene, melyet egy szilárd test felvehet, de a kohézió nélküli szemcsés anyag húzófeszültségeket nem képes elviselni.

A vályú  $B$  és  $D$  pontjában  $\beta + \delta$  irányú, azonos nagyságú feszültség hat, míg a boltív felett közel egyenletesen megoszló terhelés nyugszik. A  $\beta + \delta$  irány és a  $b$  nyílásszélesség a parabolát egyértelműen meghatározza. A fenti tulajdonságokkal rendelkező parabola emelkedésének maximuma:

$$f = \frac{b}{4} \operatorname{tg}(\beta + \delta).$$

Az  $y$  koordinátatengely a vályú nyílásának szimmetriásíkjában helyezkedve, az  $x$  tengely pedig a  $B$  és  $D$  pontokon át fektetve (23. ábra) a parabola csúcspontja az  $y$  tengelyt  $C$  magasságban metszi.



23. ábra A boltív parabolája

Az  $y$  tengelyre szimmetrikus és lefelé futó másodfokú parabola egyenletének általános alakja:

$$y = -Ax^2 + C,$$

mivel  $f=C$ , így  $C = \frac{b}{4} \operatorname{tg}(\beta + \delta)$ .

A parabola egyenletének az első differenciálhányadosa  $x = -\frac{b}{2}$  helyen

$$y' = \operatorname{tg}(\beta + \delta), \text{ tehát } y = -Ax^2 + C, \quad y' = -2Ax \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}(\beta + \delta) = 2A \frac{b}{2}.$$

A kifejezhető:  $A = \frac{1}{b} \operatorname{tg}(\beta + \delta)$

A és  $C$  értékét a parabola általános egyenletébe helyettesítve:

$$y = -\frac{x^2}{b} \operatorname{tg}(\beta + \delta) + \frac{b}{4} \operatorname{tg}(\beta + \delta),$$

$$y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \operatorname{tg}(\beta + \delta)$$

a boltív geometriai egyenletét kapjuk. A  $\operatorname{tg}(\beta + \delta)$  a boltozati feltételt megfogalmazó egyenletből behelyettesíthető:

$$y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \frac{b + h \cdot \operatorname{tg} \beta}{\lambda h}.$$

Van olyan eset, amikor a boltív a fenti egyenletben megadott alaknál laposabb. Ez akkor következik be, ha a vályú  $\beta$  dőlésszöge nagy. Ekkor a boltív az anyag egy olyan síkjára támaszkodik, mely a függőlegessel  $\varepsilon$  szöget zár be és  $\varepsilon < \beta$ . Az anyagban a súrlódás szöge  $\varphi$ , tehát a boltozati feltételt megfogalmazó és a geometriai alakot leíró egyenletben a  $\beta + \delta$  értékei helyébe az  $\varepsilon + \varphi$  lép:

$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) - \operatorname{tg} \varepsilon,$$

$$y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi).$$

A boltív akkor támaszkodik közvetlenül az anyagra, amikor  $\varepsilon + \varphi$  kisebb  $\beta + \delta$ -nál.

Ha a két boltozati feltétel közül a  $\frac{b}{h}$  arányt a  $\lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta$  egyenlet

korlátozza, a határeset azonos  $\frac{b}{h}$  aránynál áll fenn

$$\lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta = \lambda \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) - \operatorname{tg} \varepsilon.$$

A határesetre felírt fenti egyenlőség csak bizonyos  $\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi}$  értékek esetén ad az  $\varepsilon$ -ra

megoldást, mert az egyenlet másodfokú és diszkriminánsa  $\delta$  és  $\varphi$  arányától függően negatív lehet. Ha a diszkrimináns negatív, akkor a boltív továbbra is a vályú oldalfalára támaszkodik. Ha a diszkrimináns pozitív, akkor a boltív geometriai alakját az

$$y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi)$$

egyenlet írja le.

Ha a boltozati feltételek közül a  $\frac{b}{h}$  arányt a  $\lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi$  korlátozza, akkor  $\varepsilon$  szög az alábbi összefüggésből számítható:

$$\lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi = \lambda \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi) - \operatorname{tg} \varepsilon.$$

## A garatméretezés elve

Szemcsés anyagokban a boltozat kialakulásának feltételét megfogalmazó összefüggések olyan garatok méretezését teszi lehetővé, melyekből az anyag gravitációs kifolyása biztosítható és a garat helyigénye a legkisebb.

Amennyiben a boltozati feltételek egyike nem teljesül, akkor a gravitációs kiömlés biztosítható. Ha

$$\frac{b}{h} > \lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$



de 
$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta,$$

akkor a gravitációs ürítés alagútfolyással következik be. Ha viszont

$$\frac{b}{h} > \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta,$$

akkor az ürítés tömegkifolyású.

A garatok méretezésénél általában cél a legkisebb kifolyónyílás mellett a tömegkifolyás biztosítása úgy, hogy a garat függőleges mérete a lehető legkisebb legyen. A méretezés elvi menete kör keresztmetszetű garatra az alábbi.

Körszelvényű garatoknál a  $b$  nyílásszélesség helyett  $r$  sugarú kiömlőnyílást kell alkalmazni, így a

$$b \cdot h \cdot \gamma = 2 \cdot \lambda \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

egyenlet helyett értelemszerűen

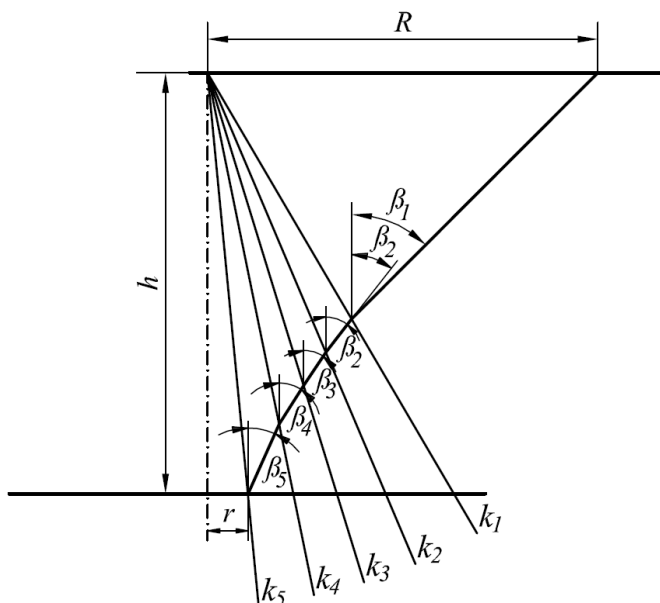
$$r^2 \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \lambda \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

írunk, melyből

$$\frac{r}{h} = \lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

A garatméretezés előtt meg kell határozni a szemcsés anyag belső súrlódási szögét, a garat felületén ébredő súrlódási szöget és a térfogatsúlyt. A súrlódási szögek nyírókísérletekkel határozhatók meg. A nyíródobozba töltött anyagra adott normál terhelések feleljenek meg a garatban várható nyomásértékeknek. A  $\delta$  súrlódási szög méréséhez célszerű a garat anyagából betétlemezt készíteni a nyíródobozhoz. A nyíródoboz nyírási síkjába helyezett betétlemezre rátöltjük a szemcsés anyagot, és nyírókísérletekkel meghatározzuk a súrlódás szögét. Amennyiben a garatban az anyag huzamosabb ideig tartózkodik, akkor ennek megfelelő reológiai méréseket kell végezni: a mintára ható normál terhelések idejét változtatva végezzük el a nyírást. Az idő logaritmusában ábrázolt anyagjellemzők görbéinek tendenciájából jól lehet következtetni a huzamosabb tárolás során várható anyagjellemzők értékére. Amennyiben a szemcsés anyag kohézióval is rendelkezik, illetve a tartós tárolás során kohéziót nyer, úgy a nyírási egyenes adott normál feszültségértékéhez az

origóból húzott egyenes vízszintes tengellyel bezárt hajlásszöge, mint a belső nyírási ellenállás szöge (effektív súrlódási szög) vehető figyelembe (lásd később).



24. ábra Garatméretezési szerkesztés

A garatméretezés elvi menete a következő:

1. Meghatározzuk a kritikus  $k_1 = \frac{r}{h}$  értékét a  $\lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi$  segítségével, mely

$$\lambda = \frac{\cos \varphi}{2} \text{ helyettesítésével: } k_1 = \frac{r}{h} = \frac{\sin \varphi}{2};$$

2. A 24. ábra szerint felvesszük a garat szimmetriatengelyét és különböző  $\frac{r}{h}$  arányú egyeneseket szerkesztünk;
3. A  $k_1$  egyeneshez tartozó  $\beta_1$  garat-dőlésszögét kiszámítjuk a  $k = \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta$  összefüggésből:

$$\beta = \operatorname{arc} \cdot \operatorname{tg} \frac{1 - \lambda - k \cdot \operatorname{tg} \delta \pm \sqrt{(1 - \lambda - k \cdot \operatorname{tg} \delta)^2 - 4\lambda \cdot \operatorname{tg}^2 \delta + 4k \cdot \operatorname{tg} \delta}}{2 \cdot \operatorname{tg} \delta};$$

4. A  $k_1$  egyenes egy adott pontjához felrajzoljuk a  $\beta_1$  szöget. (A garat felső részén a tömegkifolyás  $\beta_1$  garat-dőlésszög illetve ennél meredekebb szög alkalmazásával biztosítható.)
5. A kritikus  $k_1$  értéknél kisebb  $k_2$  arányra számítjuk a  $\beta_2$  szög értékét;

6. A  $k_1$  egyenesen nyert metszéspontra szerkesztjük a  $\beta_2$  szöget és szárát a  $k_2$  arányvonalig húzzuk, majd a  $k_2$  egyenesre felrajzoljuk a  $k_3$  alapján számított  $\beta_3$  szöget, majd a szerkesztést és számítást folytatva egyenes szakaszokkal közelített görbe alkotójú garatot nyerünk;
7. Adott kifolyónyílás mérethez, vagy a garat felső átmérőjéhez a méretarányt meghatározva mérethelyes garatalakot nyerünk, melyről a keresett méretek leolvashatók.

A kedvező kifolyást biztosító garatprofil tehát görbe.

Ha a technológiai nehézségek egyenes alkotójú garat megvalósítását indokolják, akkor a kifolyónyílás méretében számított dőlésszög az irányadó. Ha a tömegkifolyástól eltekintünk, akkor a  $k_1$  arány helyett a garat dőlésszöge indifferens, csupán az anyag természetes rézsű-szögénél kell meredekebbre választani. A görbe alkotójú garat nagy előnye, hogy a beépítési helyigénye a lehető legkisebb és meglévő garatokba betétként is behelyezhető, mellyel a kifolyási nehézségek hatásosan javíthatók.

Görbe alkotójú – hiperbolikus – garatok folyásjavító előnyei ismertek, melyet a jelen elmélet alapján méretezett garatok kísérletileg is igazoltak.

## **Kísérleti eredmények**

Az elmélet kidolgozását követően a tárolandó anyaghoz méretezett kísérleti tartályokkal és garatokkal méréseket végeztünk. Kukoricadara anyag- és súrlódási jellemzőire méretezett garat fölött 2 méter magas és 1 méter átmérőjű anyagoszlop volt.  $\beta=30^\circ$ -os dőlésszögű egyenes kúpos garatnál 150 mm átmérőjű garatnyílásig boltozat képződött és a gravitációs ürítést meggátolta. Ugyanazon tartálynál görbe alkotójú garattal 100 mm átmérőjű garatnyílással és rövidebb garat beépítéssel biztonságos kifolyást kaptunk (25. ábra).



25. ábra Görbe alkotójú garat

Elméleti számításainkat a kísérleti mérések kukoricadarán kívül nedvesített homokra – mint modellanyagra -, továbbá műtrágyára és keverék takarmányokra, extrahált szójadarára, takarmánymészre, lucernalisztre egyaránt igazolták.

## Feszültségek a kohéziós szemcsés anyagokban

A szemcsés anyagok általában a nedvességtartalomtól függően kisebb-nagyobb kohézióval rendelkeznek. A kohéziós szemcsés anyagok mechanikai viselkedésben számottevő eltérést mutatnak a kohézió nélküli szemcsés anyagoktól, mely elkülönült tárgyalásukat indokolja.

Kohéziós szemcsés anyagnak tekinthető az olyan nagyszámú, egymással érintkező szilárd testek halmaza, ahol a szemcsék – mint a halmaz alkotó elemei - közötti kohéziós erő kisebb, mint az egyes szemcséket összetartó erő. Az anyagban érvényesül Coulomb súrlódási törvénye és az egyes szemcsék a ráható erők mellett megtartják alakjukat.

### Oldalnyomás

A kohéziós szemcsés anyagok nyírási ellenállása Coulomb súrlódási törvénye értelmében:

$$\tau = \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi + c$$

összefüggéssel írható le, ahol:

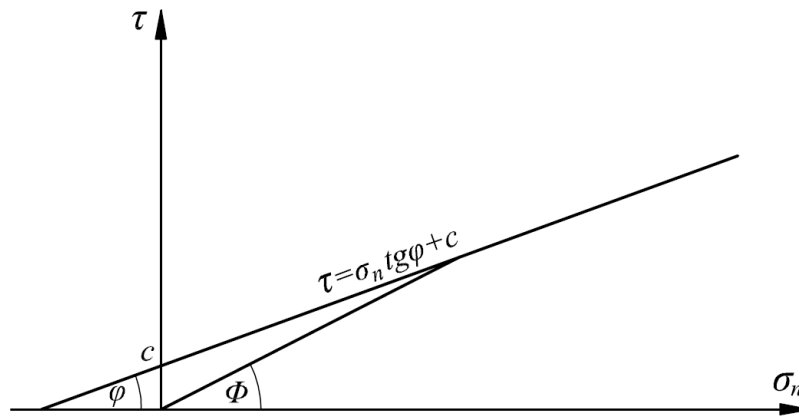
$\tau$  = az anyag nyírási ellenállása;

$\sigma_n$  = a nyírt felületre ható normál feszültség;

$\varphi$  = az anyag súrlódási szöge;

$c$  = az anyag kohéziós értéke.

A nyírási ellenállás két részből tevődik össze, a súrlódásból (mely függ a nyírt felületre merőlegesen ható nyomástól) és a kohézióból (mely viszont független a normál feszültségtől).



26. ábra A  $\Phi$  csúszási határszög és a Coulomb egyenes kapcsolata

A  $\tau - \sigma_n$  kapcsolat lineáris (26. ábra), tehát egyenest, az úgynevezett Coulomb egyenest jeleníti meg. Az egyenesen fekvő pontok csúszási határállapotot, azaz határegyensúlyi helyzetet jelentenek. Nyugalomban lévő kohéziós szemcsés anyag belsejében minden mélységhez, azaz önsúlyból származó függőleges irányú  $h\gamma$  nagyságú feszültségértékhez tartozik egy olyan határszög, ahol csúszási határállapot található. Ez a vízszintessel bezárt hajlásszög:  $\Phi$ , mely a Coulomb egyenes adott pontját és az origót összekötő egyenes vízszintes tengellyel bezárt szöge (26. ábra). A  $\Phi$  szög a normál feszültségtől, azaz a nyugalomban lévő kohéziós szemcsés anyag belsejében az önsúly által létrehozott normál feszültségtől függően változik. Tehát a  $\Phi$  szög a mélység függvénye is. A 26. ábra alapján a  $\Phi$  szögre felírható:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\tau}{\sigma_n} ,$$

mivel

$$\tau = \sigma_n \cdot \operatorname{tg} \varphi + c ,$$

és

$$\sigma_n = h\gamma \cdot \cos \Phi ,$$

így

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{c}{h\gamma \cdot \cos \Phi}.$$

A  $\Phi$  szög, tehát függvénye a súrlódási szögnek, a kohéziós értéknek, valamint a mélység és térfogatsúly szorzatának, ahol a kapcsolat már nem lineáris. Kohéziós anyag belsejében, tehát a csúszási határállapothoz tartozó felület görbe, mely érintőjének iránytangense  $\operatorname{tg} \Phi$ . A  $\Phi$  szög tulajdonképpen nem más, mint a nyírási ellenállás szöge, hasonlóan a kohézió nélküli szemcsés anyag jellemzésére használt súrlódási szöghöz. A  $\Phi$  szög fizikai tartalma megegyezik a kohézió nélküli szemcsés anyagok  $\varphi$  szögével. (A mélység függvényében változó  $\Phi$  szög  $c=0$  esetében a konstans  $\varphi$ -vé fajul.)

A  $\Phi$  szög figyelembevételével a kohéziós szemcsés anyagokra is alkalmazható a kohézió nélküli szemcsés anyagokra vonatkozó II. és III. törvény:

II. Nyugalomban lévő kohéziós szemcsés anyagokban a függőleges irányú nyomófeszültségek által ébresztett feszültségek a függőleges iránytól mért  $\pm 90^\circ - \Phi$  zónában lefelé hatnak (ahol  $\Phi$  az anyag belső nyírási ellenállásának szöge).

III. Kohéziós szemcsés anyag önsúlyból származó nyugalmi nyomás értéke a mélység és térfogatsúly szorzatának fele  $\left(\frac{h\gamma}{2}\right)$ , iránya a vízszintestől az anyag belső nyírási ellenállásának szögével lefelé tér el. A nyugalmi nyomás vízszintes összetevője:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \Phi.$$

A kohézió nélküli szemcsés anyag nyugalmi nyomásának alkalmazását kohéziós szemcsés anyagra az teszi lehetővé, hogy a szemcsés anyagokban az önsúlyból származó függőleges feszültség és a vízszintes feszültségi összetevők közötti arány csak az anyag fizikai jellemzőitől, pontosabban az anyag nyírási ellenállásának szögétől függ.

Tekintettel arra, hogy a  $\Phi$  szög a mélység függvényében változik, ezért a  $\cos \Phi$

kifejezhető a  $\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{c}{h\gamma \cdot \cos \Phi}$  összefüggésből:

$$\sin \Phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi + \frac{c}{h\gamma},$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \Phi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi + \frac{c}{h\gamma},$$

$$\cos^2 \Phi + \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \Phi + \frac{2c}{h\gamma} \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi + \frac{c^2}{h^2 \gamma^2} - 1 = 0$$

$$\cos \Phi = \frac{-\frac{c}{h\gamma} \operatorname{tg} \varphi \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - \frac{c^2}{h^2 \gamma^2}}}{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1},$$

mivel

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

így

$$\cos \Phi = -\frac{c}{h\gamma} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \pm \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{h^2 \gamma^2} \cos^2 \varphi},$$

illetve

$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi}{h\gamma} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right].$$

A  $\cos \Phi$ -re nyert összefüggés a  $\sigma_x$  képletbe helyettesítve a nyugalmi nyomás vízszintes összetevője:

$$\sigma_x = \frac{\cos \varphi}{2} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right].$$

A vízszintes  $\sigma_x$  feszültségkomponensek egy bizonyos  $h_0$  mélyséig negatív előjelűek.  $h_0$  mélységben a  $\sigma_x$  értéke 0. A  $\sigma_x = 0$  mélysége kifejezhető:

$$\frac{\cos \varphi}{2} \left[ \sqrt{h_0^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right] = 0,$$

$$h_0^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi = c^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

$$h_0^2 \gamma^2 = c^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$h_0 = \frac{c}{\gamma}.$$



$h_0$  mélységig a vízszintes felszínű kohéziós szemcsés anyag, tehát a függőleges falban megtámasztás nélkül is megáll.

A  $\sigma_x$  vízszintes feszültségkomponensek  $h_0$ -tól  $h$  mélységig vett határozott integráljával nyerhető a  $h$  magasságú függőleges támfalra ható nyugalmi nyomás  $E_0$  eredő erejének értéke (ha a támfalon nem ébred súrlódás, mely a modellkísérletek szerint a nyugalom eredményeként következik be):

$$E_0 = \int_{h_0}^h \sigma_x dh.$$

Az integrálás eredménye:

$$E_0 = \left[ \frac{h}{4} \cos \varphi \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - \frac{ch}{2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \right]_{h_0}^h - \left[ \frac{c^2}{4\gamma} \cos^3 \varphi \cdot \ln \left| \frac{h\gamma}{c \cdot \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{h^2 \gamma^2}{c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - 1} \right| \right]_{h_0}^h$$

Az ln-t tartalmazó tag az 1-nél kisebb  $\cos \varphi$  harmadik hatványa, valamint az ln aránylag kis értékének szorzata miatt elhagyható, így

$$E_0 \approx \frac{h \cdot \cos \varphi}{4} \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - \frac{c}{4} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \left( 2h - \frac{c}{\gamma} \right).$$

Tehát vízszintes felszínű kohéziós szemcsés anyag függőleges támfalra ható nyugalmi nyomásának erdő ereje:

$$E_0 = \frac{h \cdot \cos \varphi}{4} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - \left( 2c - \frac{c^2}{h\gamma} \right) \sin \varphi \right].$$

### Szabad rézsű hajlásszöge

A kohéziós szemcsés anyagot jellemző Coulomb-egyenes egy adott pontját és az origót összekötő egyenes  $\sigma_n$  tengellyel bezárt  $\Phi$  szöge úgy jellemzi az anyag nyírószilárdságát az adott  $\sigma_n$  normál feszültséghez tartozó mélységben, mint ahogy a kohézió nélküli szemcsés anyagot a  $\varphi$  súrlódási szög. A különbség csupán abban

áll, hogy a kohéziós anyagban ez a szög a nyírt felületre ható normál feszültségtől függően változik. A  $\Phi$  szög tangense a mélység függvényében az alábbiak szerint fejezhető ki:

A korábban felírt  $tg\Phi = tg\varphi + \frac{c}{h\gamma \cdot \cos\Phi}$  összefüggésből kiindulva és

$$\cos\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\Phi}} \text{ helyettesítéssel}$$

$$tg\Phi = tg\varphi + \frac{c \cdot \sqrt{1+tg^2\Phi}}{h\gamma},$$

amely összefüggésből a  $tg\Phi$  kifejezhető:

$$(c^2 - h^2\gamma^2)tg^2\Phi + 2h^2\gamma^2tg\varphi \cdot tg\Phi - (h^2\gamma^2tg^2\varphi - c^2) = 0$$

$$tg\Phi = \frac{h^2\gamma^2tg\varphi \pm c\sqrt{h^2\gamma^2tg^2\varphi + h^2\gamma^2 - c^2}}{h^2\gamma^2 - c^2}$$

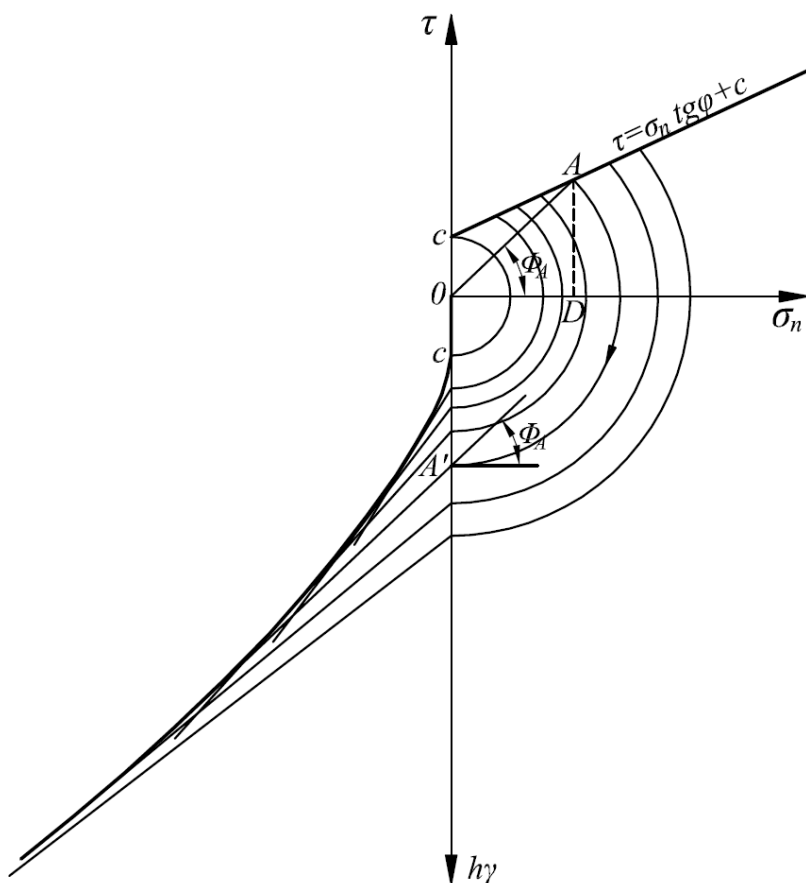
$$tg\Phi = \frac{h^2\gamma^2 \cdot \sin\varphi \pm c \cdot \sqrt{h^2\gamma^2 - c^2} \cdot \cos^2\varphi}{\cos\varphi(h^2\gamma^2 - c^2)}.$$

Tekintettel arra, hogy a nyugalomban lévő kohéziós szemcsés anyagokban az önsúlyból származó feszültségek iránya a vízszintessel  $\Phi$ -nél nagyobb szöget zárnak be, ezért a szabad rézsű legnagyobb hajlásszögét az önsúlyból származó függőleges irányú feszültségek által kiváltott, a vízszintessel  $\Phi$  szöget bezáró azon feszültségek határozzák meg, melyek még éppen nem lépnek ki a rézsű lapján.

A kohéziós rézsű a nyírási egyenesből a következők szerint (27. ábra) szerkeszthető meg:

A Coulomb-egyenes nyírókísérletek alapján történt felvétele után megszerkesztjük a mélység függvényében változó  $\Phi$  szöget: a Coulomb-egyenes  $A$  pontjának megfelelő belső nyírási ellenállás szöge  $\Phi_A$ . Az  $OAD$  háromszögben az  $OD$  oldalhosszúság  $h\gamma \cdot \cos\Phi_A$ , azaz az önsúlyból származó függőleges feszültség  $\Phi_A$  irányra merőleges összetevője. A háromszög  $OA$  átfogója tehát  $h\gamma$ , így az átfogót az  $O$  pontból körzőnyílásba véve az  $O$  pontból függőlegesen lefelé kiinduló  $h\gamma$  tengelyre leforgatva kapjuk az  $A'$  pontot, ahová a  $\Phi_A$  szöget átmásoljuk. A Coulomb-egyenesen felvett pontokhoz tartozó  $\Phi$  szögeket ily módon a  $h\gamma$  egyenesre szerkesztve megrajzolható a feszültségi irányok burkológörbéje. Amennyiben a  $h\gamma$

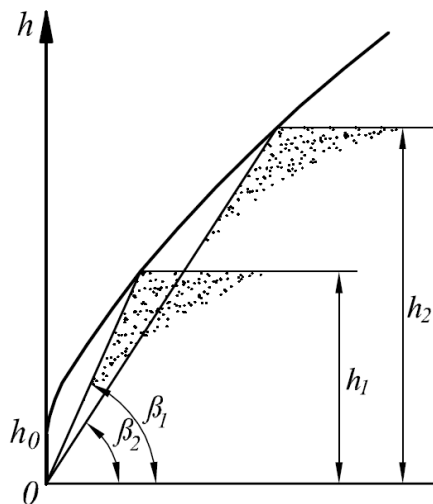
tengelyen a beosztást  $\gamma$ -val osztjuk, akkor a vízszintes felületű kohéziós szemcsés anyag legmeredekebb rézsűjének geometriai alakját nyerjük.



27. ábra Kohéziós rézsű szerkesztése

A kohéziós szemcsés anyag  $\frac{c}{\gamma}$  magasságig megtámasztás nélkül függőleges falban megáll, míg a mélység növekedésével a  $\Phi$  szög csökken, és a  $\varphi$  súrlódási szöghöz, mint határértékhez tart. A legmeredekebb rézsű alakja hiperbolikus jellegű. Amennyiben a legmeredekebb, de síklapú rézsű vízszinteshez mért hajlásszögének meghatározása a feladat, akkor a vízszinteshez  $\Phi$  szögben hajló feszültségi irányok burkológörbéjének adott mélységhez tartozó pontját az  $O$  origóval összekötő egyenes, mint a sík rézsűlap vízszintessel bezárt  $\beta$  szöge nyújtja a keresett legmeredekebb sík rézsű hajlásszögét. A vízszinteshez  $\Phi$  szögben hajló feszültségi irányok burkológörbéjét most fölfelé irányított  $h$  tengely segítségével megszerkesztve (28. ábra) az  $O$  origóból kiindulóan egy kívánt  $\beta$  szög szára által a burkológörbén kimetszett pontjához tartozó magasság nyújtja azt a rézsűmagasságot,

mely a  $\beta$  rézsűszögben sík rézsűlap mellett a vízszintes felszínű kohéziós szemcsés anyag még megtámasztás nélkül megáll.



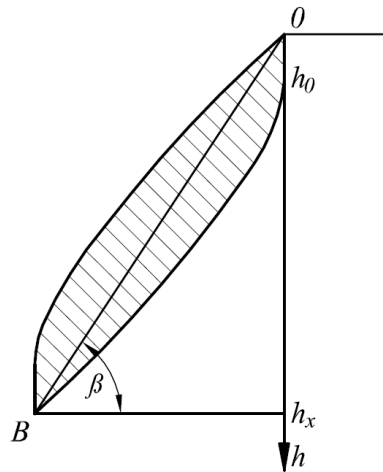
28. ábra A rézsűmagasság és a rézsűszög közötti összefüggés

A  $\Phi$  feszültségi irányok burkológörbéje homorú jellegű (27. ábra). A rézsű lapja lehet sík (28. ábra), de domború is. A domborúság mértéke annak függvénye, hogy a rézsű bármely pontján keresztül fektetett függőleges síkban vizsgált, a mélység függvényében változó, a vízszinteshez  $\Phi$  szögben hajló feszültségi irányok a rézsű lapját ne metsszék. Adott  $h_x$  magasságú rézsű domború burkológörbéje a 29. ábra szerint szerkeszthető meg:

A homorú burkológörbét a 27. ábrán bemutatott módszerrel szerkesztjük. A  $h_x$  magasságú homorú rézsű geometriai alakját a  $h_x$  pontból húzott vízszintes által a burkológörbéből kimetszett  $B$  pont és a  $h_0$   $O$  közötti görbe írja le. A  $h_x$  magassághoz tartozó domború rézsű az  $Oh_0B$  görbe oly módon történő elforgatásával nyerhető, hogy az  $O$  és  $B$  pont helyzete felcserélődik.

Szerkesztéssel könnyen igazolható, hogy domború rézsű esetén a talpponti  $B$  pont feszültséggyűjtő hely, ezért a domború rézsű állékonysága kevésbé biztos, mint a homorúé. A szerkesztésből ugyanakkor belátható, hogy az  $OB$  egyenes szakasz

vízszinteshez mért hajlásszöge egyben a  $h_x$  magassághoz tartozó síklapú rézsű legnagyobb  $\beta$  hajlásszöge.



29. ábra Domború rézsű szerkesztése

A 29. ábrán a  $h_x$  magassághoz tartozó homorú és domború határhelyzetű szabad rézsű geometriai görbéi között vonalkázott részben a rézsű lapjának geometriai alakja úgy választható, hogy az  $OB$  szakasz felett – folytonos görbét feltételezve – domború, míg alatta homorú jelleget mutasson. Törtvonalú rézsű esetén a mélység függvényében változó  $\Phi$  irányú feszültségekre a vizsgálatot el kell végezni, hogy a feszültségi irányok a rézsű lapját ne metsszék.

Domború határhelyzetű rézsű kialakulásával akkor számolhatunk, ha az anyagot megtámasztó például függőleges falat óvatosan függőlegesen lefelé mozgatva távolítjuk el, míg homorú határhelyzetű rézsű a fal függőlegesen felfelé irányuló eltávolításával nyerhető.

## Aktív feszültségi állapot

A kohézió nélküli szemcsés anyag belsejében az aktív nyomás vízszintes összetevőjét

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

összefüggés fejezi ki. Kohéziós szemcsés anyagban az aktív feszültség vízszintes összetevőjére - a  $\Phi$  és a kohézió nélküli anyagra vonatkozó  $\varphi$  analógiája alapján, mely kis súrlódási szögű és kis kohéziójú szemcsés anyagban aránylag kis mélységben már bekövetkezik – felírható:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\Phi}{2} \right),$$

azaz

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \frac{1 - \sin \Phi}{\cos \Phi}.$$

A  $\sin \Phi$  és  $\cos \Phi$  értéke Coulomb-egyeneseiből nyert összefüggés segítségével fejezhető ki:

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{c}{h\gamma \cdot \cos \Phi},$$

$$\sin \Phi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi + \frac{c}{h\gamma},$$

$$\cos \Phi = \frac{\sin \Phi}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{c}{h\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi}.$$

A  $\sin \Phi$  és  $\cos \Phi$  értékeit a  $\sigma_x$  -re felírt összefüggésbe helyettesítve:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \operatorname{tg} \varphi \frac{h\gamma - h\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi - c}{h\gamma \cdot \sin \Phi - c},$$

de

$$h\gamma \cdot \sin \Phi = h\gamma \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \Phi + c,$$

így

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \left[ \frac{h\gamma - c}{h\gamma \cdot \cos \Phi} - \operatorname{tg} \varphi \right].$$

A  $\cos\Phi$ -re a Coulomb-egyenestől levezethető volt:

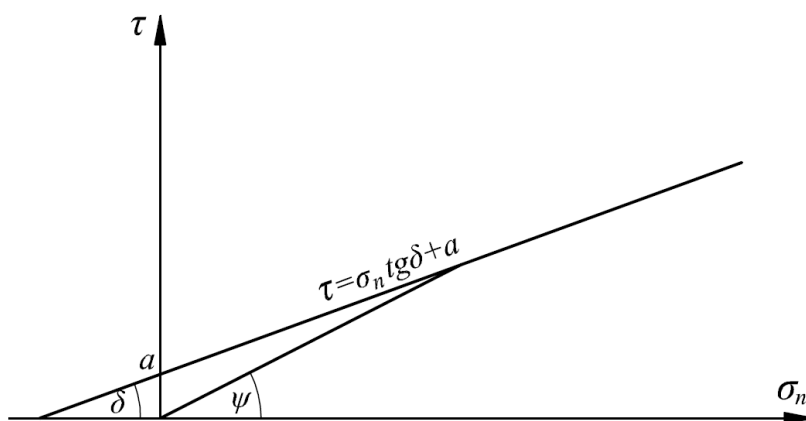
$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi}{h\gamma} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right].$$

A  $\cos\Phi$  értékét a  $\sigma_x$  összefüggésbe helyettesítve nyerhető egy adott mélységben az anyag belsejében ébredő aktív nyomás vízszintes feszültségi összetevője:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2 \cos \varphi} \left[ \frac{h\gamma - c}{\sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi} - \sin \varphi \right].$$

Amennyiben a kohéziós szemcsés anyagban az aktív feszültségi állapotot függőleges és sűrűlódásos támfal elmozdulása – elbillenése- hozza létre, akkor a támfal és az anyag között ébredő súrlódás a támfalra ható feszültségek irányát és nagyságát módosítja.

A kohéziós szemcsés anyag és a fal között ébredő súrlódás általános esetben a felületre ható normál feszültségtől függő  $\operatorname{tg} \delta$  súrlódási tényezőtől és az attól független  $a$  adhézióból tevődik össze, mely Coulomb súrlódási törvénye értelmében a 30. ábra szerinti.



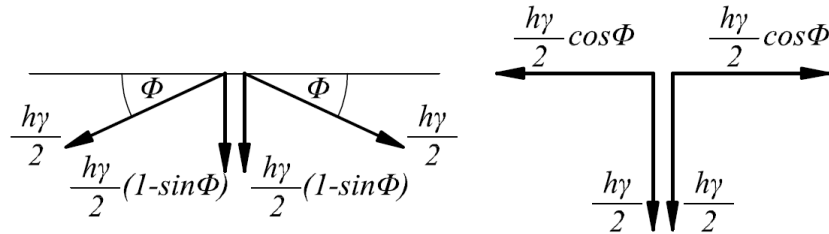
30. ábra A kohéziós szemcsés anyag és a fal között ébredő súrlódás

Egy adott  $\sigma_n$  normál feszültség mellett a súrlódási szög  $\psi$ . A  $\operatorname{tg} \psi$  a 30. ábra alapján kifejezhető:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\tau}{\sigma_n},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \delta + \frac{a}{\sigma_n}.$$

A kohéziós szemcsés anyagban a  $\Phi$  irányú feszültségeket az önsúlyból származó függőleges feszültségek hozzák létre.



31. ábra Kohéziós feszültségi modell

A kohézió nélküli szemcsés anyagokra felállított feszültségi modellt a kohéziós anyagra alkalmazva  $\varphi$  szög helyett  $\Phi$ -t használva (31. ábra) – felírható a függőleges és vízszintes feszültségi összetevők közötti arányossági kapcsolat:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\frac{h\gamma}{2}}{\frac{h\gamma}{2} \cos \Phi}.$$

Súrlódásos támfal mellett a kohéziós szemcsés anyag függőleges feszültségösszetevőinek egy része a támfalra helyeződik át, a támfalon súlyerő-felvétel valósul meg. Ha a támfalra  $\sigma_\psi$  a vízszintessel  $\psi$  szöget bezáró feszültség hat, akkor a támfal  $\sigma_\psi \sin \psi$  függőleges irányú feszültséget vesz fel az anyagból, azaz a támfal melletti anyagrész függőleges feszültségét  $\sigma_\psi \sin \psi$ -vel csökkenti. Ezzel arányosan csökken a támfalra ható vízszintes feszültségi összetevő is. A támfalra pedig  $\sigma_\psi \cos \psi$  nagyságú vízszintes feszültségkomponens hat. A függőleges és vízszintes feszültségi összetevők közötti arány alapján felírható:

$$\frac{\frac{h\gamma}{2}}{\frac{h\gamma}{2} \cos \Phi} = \frac{\frac{h\gamma}{2} - \sigma_\psi \sin \psi}{\sigma_\psi \cos \psi}.$$



A  $\sigma_\psi$  kifejezhető:

$$\sigma_\psi = \frac{h\gamma}{2} \frac{\cos \Phi}{\cos \psi + \sin \psi \cdot \cos \Phi}.$$

A  $\sigma_\psi$  vízszintes összetevője  $\sigma_h$ :

$$\sigma_h = \sigma_\psi \cos \psi,$$
$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \frac{\cos \Phi}{1 + \operatorname{tg} \psi \cdot \cos \Phi}.$$

A  $\operatorname{tg} \psi$ -re felírt összefüggésben függőleges támfal esetén  $\sigma_n = \sigma_h$ , így

$$\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \frac{\cos \Phi}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi + \frac{a \cdot \cos \Phi}{\sigma_h}}.$$

A  $\sigma_h$  kifejezhető:

$$\sigma_h = \frac{\cos \Phi}{2} \cdot \frac{h\gamma - 2a}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi},$$

ahol

$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi}{h\gamma} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right].$$

A kohéziós szemcsés anyag súrlódásos támfalra ható aktív nyomása tehát kisebb, mint a nyugalmi nyomása. A támfalon ébredő adhézió esetén a vízszintes feszültségkomponensek:

$$\frac{a \cdot \cos \Phi}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi}$$

értékkel csökkennek az adhézió nélküli támfalhoz viszonyítva. Kohéziós szemcsés anyag elbillenő támfalra ható aktív nyomóerejének vízszintes  $E_h$  összetevője a  $\sigma_h$  határozott integráljával számítható, ahol az integrálás alsó határa  $\sigma_h = 0$  feltételből adódik:

$$\frac{\cos \Phi}{2} \cdot \frac{h\gamma - 2a}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi} = 0$$

Az egyenlőség fennáll, ha  $\Phi = 90^\circ$ , mely  $h_0 = \frac{c}{\gamma}$ -nál következik be, illetve ha

$$h\gamma = 2a$$

és így

$$h = \frac{2a}{\gamma}, \text{ azaz } h_0 = \frac{2a}{\gamma}.$$

Tehát az integrálás alsó határa  $h_0$ , de  $h_0$ -ra a  $\frac{c}{\gamma}$ , illetve  $\frac{2a}{\gamma}$  közül a nagyobb érték veendő figyelembe.

$$E_0 = \int_{h_0}^h \frac{\cos \Phi}{2} \cdot \frac{h\gamma - 2a}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi} dh$$

ahol  $\cos \Phi$  szintén a  $h$  függvénye is.

## Összefoglalás

A szemcsés anyag alapvető fizikai tulajdonságai lényegesen eltérnek a kémiaiilag azonos, de szilárd, folyékony, vagy gáznemű állapotú anyagétól, ezért külön halmazállapotkénti meghatározását indokolja.

Az ideális szemcsés anyag – hasonlóan a tökéletes gáz, ideális folyadék és kristályos szilárd anyag fogalmához – a kohézió nélküli szemcsés anyag.

A kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai alaptörvényei az alábbiak:

- I. Kohézió nélküli szemcsés anyagokban csak nyomó- és nyírófeszültségek ébredhetnek.
- II. Nyugalomban levő, kohézió nélküli szemcsés anyagokban a függőleges irányú nyomófeszültségek által ébresztett feszültségek a függőleges iránytól mért  $\pm 90^\circ - \varphi$  zónában lefelé hatnak. ( $\varphi$  az anyag súrlódási szöge.)
- III. A kohézió nélküli szemcsés anyag önsúlyából származó oldalnyomás értéke a mélység ( $h$ ) és térfogatsúly ( $\gamma$ ) szorzatának fele ( $\frac{h\gamma}{2}$ ), iránya a vízszintestől az anyagban ébredő súrlódási szöggel lefelé tér el, ha a felszín vízszintes és az adott mélység felett az anyag a vízszintessel  $\varphi$  szöget bezáró teret egyenletesen kitölti.

IV. A kohézió nélküli szemcsés anyagok mindaddig megtartják az őket jellemző fizikai-mechanikai törvényeket, amíg alkotó elemeik, a szemcsék, megőrzik relatív nyugalmaikat. Amint a szemcsék relatív mozgásba kerülnek – egymással ütköznek -, a szemcsés anyagok a folyadékok fizikai-mechanikai törvényei szerint viselkednek.

A kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai törvényei statisztikai jelleggel érvényesülnek, mert maga az anyag különböző szemcsék sokaságából áll.

A szemcsés anyagokban a feszültségek – egy adott felületre számított átlagerők – vektoriálisan felbonthatók, illetve összegezhetőek.

A nyugalmi nyomás tényezője:  $\lambda = \frac{\cos \varphi}{2}$ .

Kohézió nélküli szemcsés anyagban a vízszintessel  $\beta$  szöget bezáró és a halmaz felé dőlő síkban az oldalnyomás  $\sigma_{\varphi} = \frac{h\gamma}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} \right)$  és iránya a vízszintessel  $\varphi$  szöget zár be.

Expanzió következtében előálló aktív feszültségi állapotban a mozgás a vízszintessel  $45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}$  irányban valósul meg.

Függőleges súrlódásos támfalra ható nyomás vízszintes összetevője  $\sigma_h = \frac{h\gamma}{2} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \varphi}$ , ahol  $\delta$  a támfal és az anyag között ébredő súrlódás szöge.

A boltozat kialakulásának feltételét egy vályúban két egyenlőség egyidejű fennállása fogalmazza meg:

$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{b}{h} \leq \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta,$$

ahol:

- b a vályú kifolyó nyílásának mérete,
- h a vályú magassága,
- $\lambda$  a nyugalmi nyomás tényezője,
- $\beta$  a vályú dőlésszöge a függőlegeshez mérve,
- $\delta$  a vályú és az anyag között ébredő súrlódás szöge.

A vályúból a kifolyás történhet tömegfolyással, ha  $\alpha > \beta + \delta$ , azaz  $\frac{b}{h} > \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta$ . Alagútfolyás akkor következik be, ha  $\alpha < \beta + \delta$ , azaz  $\frac{b}{h} < \lambda \cdot \operatorname{tg}(\beta + \delta) - \operatorname{tg} \beta$ , de  $b > \lambda h \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .

A boltív geometriai egyenlete  $y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \frac{b + h \cdot \operatorname{tg} \beta}{\lambda h}$ , illetve

$y = \left( \frac{b}{4} - \frac{x^2}{b} \right) \operatorname{tg}(\varepsilon + \varphi)$ , ha a boltozat a függőlegeshez mért  $\varepsilon$  szögben hajló síkban az anyagra támaszkodik. Az  $\varepsilon$  szög számítható.

A boltozat kialakulásának feltételei ismeretében folyásbiztos garatok méretezhetők. A méretezés menetét jelen munka bemutatja. E méretezési eljárással kapott görbe alkotójú garattal végzett kísérletek az elméleti számítások helyességét igazolták.

Nyugalomban lévő kohéziós szemcsés anyagban a függőleges irányú nyomófeszültségek által ébresztett feszültségek a függőleges iránytól mért  $\pm 90^\circ - \Phi$  zónában lefelé hatnak (ahol  $\Phi$  az anyag belső nyírási ellenállásának szöge).

Kohéziós szemcsés anyag önsúlyból származó nyugalmi nyomás értéke a mélység és térfogatsúly szorzatának fele  $\left( \frac{h\gamma}{2} \right)$ , iránya a vízszintestől az anyag belső nyírási ellenállásának szögével lefelé tér el. A nyugalmi nyomás vízszintes feszültségösszetevője:

$$\sigma_x = \frac{h\gamma}{2} \cos \Phi,$$

illetve

$$\sigma_x = \frac{\cos \varphi}{2} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right],$$

ahol a c a kohéziós érték.

Vízszintes felszínű kohéziós szemcsés anyag függőleges támfalra ható nyugalmi nyomásának eredő ereje:

$$E_0 = \frac{h \cdot \cos \varphi}{4} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - \left( 2c - \frac{c^2}{h\gamma} \right) \sin \varphi \right].$$

Kohéziós szemcsés anyag függőleges falban megtámasztás nélkül

$$h_0 = \frac{c}{\gamma}$$

magasságig állékony. A legmeredekebb rézsű szerkesztésének alapelve, hogy az önsúly által ébresztett  $\Phi$  irányú feszültségek a rézsű lapját érintsék. Kohéziós rézsű szerkesztésének menete jelen munkában megtalálható.

Kohéziós szemcsés anyag  $\delta$  súrlódási szöggel és  $a$  adhéziós tényezővel rendelkező függőleges támfalra ható aktív nyomásának vízszintes feszültség-összetevője:

$$\sigma_h = \frac{\cos \Phi}{2} \cdot \frac{h\gamma - 2a}{1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \cos \Phi},$$

ahol

$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi}{h\gamma} \left[ \sqrt{h^2 \gamma^2 - c^2 \cdot \cos^2 \varphi} - c \cdot \sin \varphi \right].$$

## Felhasznált irodalom

1. Mester, L.: Kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai elméletének alapjai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977. 39p.
2. Mester, L.: Kohézió nélküli szemcsés anyagok fizikai-mechanikai alaptörvényei. Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 1977. 24.3. 109-114p.
3. Mester, L.: Szemcsés anyagok fizikai-mechanikai tulajdonságai. Tanulmány. Mezőgépfelkészítő Intézet, 1977. 83p.
4. Mester, L.: Feszültségek a kohéziós szemcsés anyagokban. Járművek, Mezőgazdasági Gépek, 1978. 25.2. 56-60p.
5. Mester, L.-Czike, I.: Mezőgazdasági szemes és szemcsés anyagok agrofizikai jellemzőinek meghatározása. Élelmezési Ipar, 1979. 33.9. 349-355p.
6. Mester, L.: A boltozat kialakulásának mechanizmusa szemcsés anyagokban, a garatméretezés elméleti alapjai. Járművek, Mezőgazdasági gépek, 1980. 27.8. 285-290p.
7. Mester, L.-Tóth, F.: Folyásjavító garatok szemcsés anyagok silós tárolásához. Mezőgazdasági Technika, 1980. 20.12. 26p.
8. Terzaghi, K.: Large Retaining Wall Tests, Engg, News Record No.112. 1934.
9. Terzaghi, K.: Stress Distribution in Dry and in Saturated Sand above a Yielding Trap- Door. Proc. Inf. Conf. Soil Mech. I. Cambridge 1936.